

Analysis Zusammenfassung

1.) Mengen und Funktionen

Funktion:

Eine Funktion ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen X und Y , in der **jedem** Element des Definitionsbereichs (X) **genau ein** Element des Wertebereichs (Y) zugeordnet wird.

Schreibweise: $f: X \rightarrow Y$

Wenn nicht anders aufgeführt, wird der **größtmögliche** Definitionsbereich in den reellen Zahlen angenommen.

Funktionstypen

- **Injektiv:** Jedem Element des Wertebereichs wird **höchstens ein** Element des Definitionsbereichs zugeordnet
- **Surjektiv:** Jedem Element des Wertebereichs wird **mindestens ein** Element des Definitionsbereichs zugeordnet
- **Bijektiv:** Jedem Element des Wertebereichs wird **genau ein** Element des Definitionsbereichs zugeordnet (injektiv und surjektiv)
- Weder injektiv noch surjektiv

Reelle Funktion mehrerer Variablen:

Eine reelle Funktion mehrerer Variablen ist eine Funktion, die jedem n -dimensionalen Punkt im Definitionsbereich genau ein Punkt im Wertebereich zuordnet.

Vektoren

Ein Punkt im Euklidischen Raum \mathbb{R}^n kann durch einen n -dimensionalen Vektor dargestellt werden.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x' = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$$

Die Transponierte des Vektors x wird als x' geschrieben und ist der korrespondierende Zeilenvektor.

Norm des Vektors: Länge vom Ursprung

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Vektoren mit $\|x\| = 1$ werden als **Einheitsvektoren** bezeichnet.

2.) Funktionen mehrerer Variablen

Funktionale Grenzwerte

Der Grenzwert beschreibt, was mit dem Funktionswert $f(x)$ passiert, wenn x sich einem Wert x_0 beliebig annähert, jedoch nie gleich x_0 wird.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Regeln:

1. x_0 muss nicht teil des Definitionsbereichs sein, man muss sich dem Punkt lediglich beliebig nähern können
2. Der linksseitige Grenzwert muss dem rechtsseitigen Grenzwert entsprechen
3. Der Grenzwert darf nicht gegen unendlich oder -unendlich gehen

Rechenregeln:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) * g(x)) = A * B$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B} ; B \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^r = A^r$

Grenzwert für reelle Funktionen mehrerer Variablen

Der Grenzwert für Funktionen mehrerer Variablen ist weiterhin eine reelle Zahl. Der einzige Unterschied ist, dass sich \mathbf{x} einem Vektor \mathbf{x}_0 nähert.

Stetigkeit

Eine Funktion mit n Variablen ist an der Stelle x_0 stetig, wenn

1. Die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist
2. Wenn der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 existiert
3. Wenn der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 gleich $f(x_0)$ ist

Eine Funktion heißt stetig, wenn sie an **allen** Punkten ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Regel: Jede Funktion, die aus stetigen Funktionen durch Kombination einer oder mehrerer Variablen durch eine der folgenden Operatoren (+, -, *, /, Verkettung) erzeugt werden kann, ist stetig in allen Punkten, in denen sie definiert ist.

Differenzierbarkeit

Die Ableitung einer Funktion ist der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Theorem: Wenn eine Funktion in einem Punkt differenzierbar ist, ist sie dort auch stetig!

Partielle Ableitungen

Die Partielle Ableitung einer multivariaten Funktion gibt an, wie sich der Funktionswert ändert, wenn eine Variable x_1 variiert wird, während alle anderen konstant gehalten wird.

Schreibweise: $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ oder $f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Die Ableitungsregeln sind dieselben wie für den univariaten Fall.

Tangentialebene

Die Tangentialebene enthält die Menge aller möglichen Tangenten an einem Punkt z_0

$$z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

Partielle Ableitung Höherer Ordnung

Die partiellen Ableitungen, insofern sie differenzierbar sind, können nun erneut abgeleitet werden. Die partiellen Ableitungen können sich wiederum nach verschiedenen Variablen ändern. Für Funktionen mit 2 Variablen gilt, wenn alle partiellen Ableitungen stetig sind:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung lassen sich in der **Hesse Matrix** zusammenfassen

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Wenn die Funktion $f(x)$ stetige partiellen Ableitungen in ihrem Definitionsbereich hat, nennen wir sie stetig differenzierbar oder eine C^1 Funktion. Wenn alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, wird f eine C^k Funktion genannt

3.) Mathematisches Handwerkszeug

Kettenregel bivariater Fall/totale Ableitung

Gegeben ist eine Funktion $z = f(x, y)$, wobei x und y wiederum Funktion von einer anderen Variablen sind (bspw.: t)

→ $y = g(t)$ und $x = h(t)$

Veränderung von Funktionswert z hängt von der Veränderung von x und y ab (siehe partielle Ableitungen), welche wiederum von der Veränderung von t abhängen

Der Effekt von t auf f ist die Summe aus

1. Dem Effekt von x auf z multipliziert mit dem Effekt von t auf x
2. Dem Effekt von y auf z multipliziert mit dem Effekt von t auf y

$$\frac{df(x, y)}{dt} = f_x(x, y) \frac{dg(x)}{dt} + f_y(x, y) \frac{dh(x)}{dt}$$

Die Ableitung heißt totale Ableitung von z nach t

Ausweitung auf allgemeinen Fall

Gegeben: $z = f(x,y)$ mit

$x = g(s,t)$ und $y = h(s,t)$

Ergebnis: zwei partielle Ableitungen von z nach s und nach t

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= f_x(x,y) \frac{\partial x}{\partial s} + f_y(x,y) \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= f_x(x,y) \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x,y) \frac{\partial y}{\partial t}\end{aligned}$$

Allgemeine Definition: Wenn $z = f(x)$ stetig differenzierbar ist und $x_i = g(t_1, t_2, \dots, t_m)$ für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ differenzierbar ist, dann gilt

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Höhenlinien

Definition: Eine Höhenlinie der Funktion $z = f(x,y)$ ist die Menge aller Kombinationen von x und y im Definitionsbereich, die denselben Funktionswert ergeben.

Alle Elemente der Menge lösen die Gleichung $f(x,y) = c$

Die Höhenlinie ergibt sich graphisch als Schnittmenge zwischen der Funktion und einer Ebene, welche einem gegebenen Funktionswert entspricht (c). Diese Höhenlinien werden zweidimensional dargestellt (Projektion auf x/y Ebene)

Implizites Differenzieren

Berechnung der Steigung eines Punktes entlang einer Höhenlinie durch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Fall mit 3 Variablen $F(x,y,z) = 0$

z kann als Funktion von x und y geschrieben werden

$\rightarrow F(x,y,f(x,y)) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Allgemeiner Fall $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$

Wenn F und $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ differenzierbar sind, gilt

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_z}$$

Homogene Funktionen

Frage: Mit welchem Faktor vervielfacht sich die Funktion, wenn die Variablen mit einem Faktor t vervielfacht werden?

Definition: Eine Funktion $f(x, y)$ von zwei Variablen x und y , mit Definitionsbereich D , heißt homogen vom Grad k , wenn für alle $(x, y) \in D$ gilt

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \text{ für alle } t > 0$$

Lineare Approximation

Bei einer linearen Approximation einer Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0 gilt für Werte von x in der Nähe von x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Für den bivariaten Fall gilt

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Allgemeine Formulierung für $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ am Punkt $(x^0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

$$f(x) \approx f(x^0) + f_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \dots + f_{x_n}(x^0)(x_n - x_n^0)$$

Differential einer Funktion

Das Differential approximiert die Veränderung des Funktionswerts

$$dy = f'(x)dx$$

Beachte Differentialregeln Skript S.34

Polynomiale Approximation

Quadratische Approximation/Approximation mit Polynom 2. Ordnung

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Taylor-Approximation n-ten Grades

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Quadratische Taylor-Approximation für bivariaten Fall

$$f(x) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]$$

4.) Multivariate Optimierung

Globale und Lokale Extreme

Minima und Maxima sind Extrema einer Funktion und können lokaler oder globaler Natur sein. Außerdem können Extrema strikt sein.

1. Globales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt $f(x^*) \geq f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs
2. Striktes Globales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt $f(x^*) > f(x)$ für alle x des Definitionsbereichs
3. Lokales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt $f(x^*) \geq f(x)$ für alle x Nahe x^*
4. Striktes Lokales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt $f(x^*) > f(x)$ für alle x Nahe x^*

Bisher wurden Extrema immer über die Gleichsetzung der 1. Ableitung mit 0 und Auflösung nach x bestimmt. Jedoch können folgende Probleme auftreten:

1. Das globale Minimum/Maximum kann am Rand des Definitionsbereichs auftreten, an dem die Funktion nicht differenzierbar ist
2. Das globale Minimum/Maximum kann nicht existieren (bspw. Bei offenen Intervallen)
3. Das globale Minimum/Maximum ist an einer Stelle, an der die Funktion nicht differenzierbar oder nicht stetig ist. (z.B. Minimiere $f(x) = |x|$)

➔ Satz von Weierstrass als hinreichende Bedingung für Extrema

Randpunkte

Ein Punkt p des Intervalls I ist ein Randpunkt, wenn jedes noch so kleine Intervall A gewählt werden kann, sodass ein Element innerhalb von I und eins außerhalb von I enthält.

Offene und geschlossene Mengen

Offen, wenn nur aus inneren Punkten

Geschlossen, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält

Des Weiteren können Menge offen **und** geschlossen oder weder offen noch geschlossen sein.

Beschränkte Mengen

Eine Menge ist beschränkt, wenn

1. Es ein Intervall gibt, in der die Menge komplett enthalten ist (beschränkt in \mathbb{R})
2. Es einen Kreis gibt, in der die Menge komplett enthalten ist (beschränkt in \mathbb{R}^2)

Intuitiv: Kein unendlich in der Menge

Kompakte Mengen

Eine Menge ist kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Extremwertsatz von Weierstrass

Wenn eine Funktion $f(x)$ innerhalb einer nicht-leeren, kompakten Menge K stetig ist, dann existiert sowohl eine Stelle x_{\min} , an der die Funktion ein globales Minimum hat als auch eine Stelle x_{\max} , an der die Funktion ein globales Maximum hat (hinreichende Bedingung).

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \text{ für alle } x \in K$$

4.1) Multivariate Optimierung ohne Nebenbedingungen

Bedingungen erster Ordnung (First Order Conditions/FOC)

Die partiellen Ableitungen der Funktion müssen für die Existenz eines Extremums für innere Punkte 0 annehmen (notwendige Bedingung), d.h. es muss eine stationäre Stelle vorliegen.

Kritische Punkte

Gegeben sei eine stetige Funktion. Die kritischen Punkte sind die stationären Punkte und die Punkte, an denen partielle Ableitungen nicht definiert sind. In beiden Fällen muss $f(x)$ für diese Stelle definiert sein.

Bedingungen zweiter Ordnung

Die Bedingung zweiter Ordnung kommt in Einsatz, um ausschließen zu können, dass die Stationäre Stelle ein Sattelpunkt ist.

Die Analyse läuft über die quadratische Form ab.

Quadratische Form

$$z = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = a_{11}v_1^2 + 2v_1v_2a_{12}a_{21} + a_{22}v_2^2$$
$$A = \begin{bmatrix} (x - x_0) & (y - y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{bmatrix}$$

Die Aussagekraft der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung wird durch das Vorzeichen (Definitheit) der quadratischen Form um den stationären Punkt bestimmt

Eine quadratische Form $z = \mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v}$ heißt

1. Positiv definit, wenn $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} > 0$ für alle $\mathbf{v} \neq 0$
2. Negativ definit, wenn $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} < 0$ für alle $\mathbf{v} \neq 0$
3. Positiv semidefinit, wenn $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} \geq 0$ für alle \mathbf{v}
4. Negativ semidefinit, wenn $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{v} \leq 0$ für alle \mathbf{v}
5. Indefinit, wenn keiner der obigen Fälle zutrifft

Da quadratische Form von der Matrix A abhängt, wird nur noch A als positiv/negativ... definit bezeichnet

Kofaktor

$$K_{ij} = (-1)^{i+j} * \det(A_{ij})$$

Wobei A_{ij} die Streichungsmatrix ist

Minoren

Gegeben sei eine (n x n) - Matrix A

1. Determinanten der Matrizen, die durch Löschung von n-k Spalten und n-k Zeilen einer quadratischen Matrix A entstehen heißen Minoren k-ter Ordnung
2. **Hauptminoren k-ter Ordnung:** Gleiche Zeilen- und Spaltenindize gelöscht bei Löschung von n-k Zeilen/Spalten
3. **Führende Hauptminoren:** Sukzessive Löschung der letzten Spalte und Zeile

Definitheit einer symmetrischen Matrix

1. Positiv definit, wenn und nur wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind
2. Negativ definit, wenn und nur wenn alle führenden Hauptminoren ungerade Ordnung negativ und alle führenden Hauptminoren gerade Ordnung positiv sind
3. Alle anderen Fälle führen zu Semidefinitheit oder Indefinitheit

Anwendung auf Bedingung zweiter Ordnung

Notwendige Bedingung zweiter Ordnung: Gegeben sei eine 2-fach differenzierbare Funktion $f(x,y)$ und ein innerer Punkt (x_0, y_0)

1. Wenn die Funktion an der Stelle (x_0, y_0) ein Maximum hat, dann ist $H(x_0, y_0)$ negativ semidefinit
2. Wenn die Funktion an der Stelle (x_0, y_0) ein Minimum hat, dann ist $H(x_0, y_0)$ positiv semidefinit

Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung: Gegeben sei eine 2-fach differenzierbare Funktion $f(x,y)$ und ein innerer Punkt (x_0, y_0) . Wenn (x_0, y_0) ein stationärer Punkt ist und die

1. Hesse-Matrix $H(x_0, y_0)$ positiv definit ist, dann ist (x_0, y_0) ein striktes lokales Maximum
2. Hesse-Matrix $H(x_0, y_0)$ negativ definit ist, dann ist (x_0, y_0) ein striktes lokales Minimum

Auffinden globaler Extrema

Gegeben sein eine Funktion $f(x)$, die auf dem Intervall $[a,b]$ (abgeschlossen und beschränkt) stetig ist. Zum Auffinden der globalen Extrema werden folgende Schritte benutzt:

1. Auffinden aller kritischen Punkte der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$
2. Evaluation der Funktion an allen kritischen Punkten und an den Randpunkten
3. Identifizierung globales Maximum und globales Minimum

Konkavität/Konvexität

Eine Menge M heißt konvex, wenn für alle $x,y \in M$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ stets gilt

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$$

In Worten ausgedrückt ist eine Menge konvex, wenn eine Linie zwischen zwei Punkten dieser Menge komplett in der Menge liegt.

Konkave/Konvexe Funktionen

Eine Funktion $f(x)$, die auf einer konvexen Menge M definiert ist, heißt

1. Konvex, wenn für alle $x,y \in M$ und $t \in M$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f[tx + (1 - t)y] \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

2. Konkav, wenn für alle $x,y \in M$ und $t \in M$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f[tx + (1 - t)y] \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

3. Streng konvex, wenn für alle $x, y \in M$ und $t \in M$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f[tx + (1 - t)y] < tf(x) + (1 - t)f(y)$$

4. Streng konkav, wenn für alle $x, y \in M$ und $t \in M$ mit $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$f[tx + (1 - t)y] > tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Graphisch illustriert bedeutet dies, dass eine Funktion

1. Konvex ist, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Funktionswerten komplett auf oder oberhalb des Graphen der Funktion liegt
2. Konkav ist, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Funktionswerten komplett auf oder unterhalb des Graphen der Funktion liegt

Bzw. ausgedrückt mithilfe von Epi- und Hypographen

1. Der Epigraph der Funktion ist die Menge aller Punkte, die auf oder über dem Graphen liegen. Die Funktion ist konvex, wenn der Epigraph eine konvexe Menge ist
2. Der Hypograph der Funktion ist die Menge aller Punkte, die auf oder unter dem Graphen liegen. Die Funktion ist konkav, wenn der Hypograph eine konvexe Menge ist

Gegeben sei $f(x)$, eine reelle, 2-fach differenzierbare Funktion einer Variablen definiert auf einer konvexen Menge M

1. $f(x)$ ist konkav auf M , wenn und nur wenn $f''(x) \leq 0$ für alle inneren Punkte von M
2. Wenn $f''(x) < 0$ für alle inneren Punkte von M , dann ist $f(x)$ streng konkav auf M
3. $f(x)$ ist konvex auf M , wenn und nur wenn $f''(x) \geq 0$ für alle inneren Punkte von M
4. Wenn $f''(x) > 0$ für alle inneren Punkte von M , dann ist $f(x)$ streng konvex auf M

Gegeben sei eine reelle, 2-fach differenzierbare, multivariate Funktion $f(\mathbf{x})$ mit stetigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung definiert auf einer konvexen Menge M . Die Hesse-Matrix der Funktion am Punkt \mathbf{x} wird geschrieben als $H(\mathbf{x})$. Dann gilt:

1. $f(\mathbf{x})$ ist konkav auf M , wenn und nur wenn $H(\mathbf{x})$ negativ semidefinit ist für alle $\mathbf{x} \in M$
2. Wenn $H(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in M$ negativ definit ist, ist $f(\mathbf{x})$ streng konkav
3. $f(\mathbf{x})$ ist konvex auf M , wenn und nur wenn $H(\mathbf{x})$ positiv semidefinit ist für alle $\mathbf{x} \in M$
4. Wenn $H(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in M$ positiv definit ist, ist $f(\mathbf{x})$ streng konvex

Theorem zu Konkavität und Konvexität

1. Wenn f konkav (konvex) ist, ist $-f$ konvex (konkav)
2. Wenn f und g konkav (konvex) sind, ist auch die Summe $af + bg$ mit $a, b > 0$ konkav (konvex)

Es sei $f(\mathbf{x})$ eine reelle Funktion, die auf einer konvexen Menge M definiert ist.

1. Wenn $f(\mathbf{x})$ konkav ist und mindestens ein Maximum besitzt, ist jedes lokale Maximum ein globales Maximum
2. Wenn $f(\mathbf{x})$ streng konkav ist existiert entweder ein oder kein Maximum

Die obigen Theoreme gelten auch wenn die Funktion konvex ist für Minima

4.2) Optimierung unter Nebenbedingungen

Unterschieden wird zwischen Gleichungsnebenbedingungen und Ungleichungsnebenbedingungen

Substitutionsmethode

Einsetzen der Gleichungsnebenbedingung in die zu optimierende Zielfunktion. Dazu wird die Nebenbedingung nach einer Variablen aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt. Anschließend lässt sich die Zielfunktion ableiten und gleich 0 setzen, um Maxima/Minima zu bestimmen.

Vorteilhaft für einfache Funktionen/nur eine Nebenbedingung

LaGrange Multiplikatoren

Gegeben Optimierungsproblem mit Gleichheitsnebenbedingung

$$\max f(x, y) \text{ u. d. N. } g(x, y) = c$$

1. Bildung LaGrange Funktion unter Einführung der LaGrange-Multiplikatoren λ

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$$

2. Bildung der ersten partiellen Ableitungen der LaGrange-Funktion nach x, y und λ . Nullsetzen liefert erste drei Bedingungen 1. Ordnung \rightarrow LGS

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= c - g(x, y) = 0\end{aligned}$$

3. Auflösen der Gleichungen nach den Unbekannten x^*, y^* und $\lambda^* \rightarrow$ Kritische Punkte
4. Evaluation Minima/Maxima \rightarrow Einsetzen Kritischer Punkt in Zielfunktion

Das Optimum liegt an einem Punkt, an dem die Steigung **einer** Höhenlinie der Zielfunktion und **die** Steigung der Nebenbedingungen gleich sind.

Die LaGrange Methode funktioniert nur mit Sicherheit, wenn der Gradientenvektor der Nebenbedingung am Punkt (x^*, y^*) ungleich dem Nullvektor ist.

$$\begin{bmatrix} g_x(x^*, y^*) \\ g_y(x^*, y^*) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretation des LaGrange Multiplikators

$$\max f(x, y) \text{ u. d. N. } g(x, y) = c$$

Die optimalen Werte x^* und y^* sind von c abhängig \rightarrow Maximierter Wert der Zielfunktion auch abhängig von c . Die Maximanden werden in die Zielfunktion eingesetzt und ergeben die sogenannte Wertfunktion.

$$F(c) = f[x^*(c), y^*(c)]$$

Die Wertfunktion kann nach c differenziert werden

$$\frac{dF(c)}{dc} = f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc}$$

λ^* gibt Auskunft darüber, wie sich die Zielfunktion im Optimum ändert, wenn man c um eine kleine Einheit verändert

Zusatz: Faktorisierung nochmal anschauen