



FINANZMATHEMATIK

Jasmin Weber

1. Grundlagen

a) Einführung Finanzmathematik

- Finanzmathematik analysiert die **zeitliche Entwicklung finanzieller Größen**
 - Analyse von Zahlungsströmen und Wertentwicklung
- **Anwendungen:** z.B. Ermittlung eines Kaufpreises für ein Wertpapier, Vermögensbewertung, Entscheidungsfindung bei mehreren Anlagealternativen
- im **Basis-Zeitmodell** sind die Zahlungszeitpunkte äquidistant, d.h. sie weisen den gleichen Abstand zueinander auf, im **verallgemeinerten Zahlungsstrommodell** können zu beliebigen Zeitpunkten Zahlungen erfolgen
 - vorschüssig: z_1, z_2, \dots, z_T ; **vorschüssig = nachschüssig * q**
 - nachschüssig: $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{T-1}$
- Grundform Zahlungsstrom: $Z = \{z(t_0), z(t_1), \dots, z(t_n)\}$
- **Tagzählungsmethoden:**
 - echt/echt tatsächliche Anzahl der Tage von Monaten und Jahr wird gezählt (! Berücksichtigung Schaltjahre)
 - 30/360 jeder Monat wird mit 30 Tagen gezählt, jedes Jahr mit 360
 - echt/360 tatsächliche Anzahl der Tage des Monats, Jahr mit 365 Tagen
 - *ein Tag wird nicht mitgezählt, egal ob erster oder letzter*
- Berechnung Zinstage: **[Tag (Datum 1) – Tag (Datum 2)] + [Monat (Datum 1) – Monat (Datum 2)] + [Jahr (Datum 1) – Jahr (Datum 2)]** -> hier ist der letzte Tag bereits nicht mitgezählt – VORSICHT wenn man eine Periode auf einzelne aufsplittet; Korrektur (+1 bei Subperioden) nötig
- **72er-Regel:**
 - Wann verdoppelt sich mein Kapital?
 - $\frac{72}{\text{Zinsfuß}}$

b) Anlageformen

- **Standardinvestment**
 - $Z = \{-az_0, z_1, \dots, z_T\}$
 - $z_T \geq 0$ für $t = 1, \dots, T$
 - eine Auszahlung und dann folgende nicht negative Rückflüsse

Konkrete Anlageformen:

- **Festzinstitel (Standard-/Bond)**
 - $Z = \{-N, Z, Z, \dots, Z + N\}$
 - Kauf des Titels zu Nennwert in t_0 ; jährlich nachschüssige Zinsen (Kupon) in fester Höhe über gesamte Laufzeit (Kupon = Nennwert **$N * i$** Nominalzins); endfällige Tilgung
- **Nullkuponanleihe (Zerobond)**
 - $Z = \{N - D, 0, 0, \dots, N\}$
 - Kauf des Titels zu diskontiertem Preis, keine Zinszahlungen, endfällige Tilgung zum vollen Nennwert (**Abschlag/Diskont**)

2. Zinsrechnung

a) Grundlagen

Prämisse: Vollkommener Kapitalmarkt

- Sollzins (Kreditnehmer zahlt) = Habenzins (Sparer bekommt)
- zu jeder Zeit kann beliebig viel Kapital angelegt und aufgenommen werden
- Periodenzinssatz $r > 0 \rightarrow$ unabhängig von der Dauer der Anlage/des Kredits

Notationen:

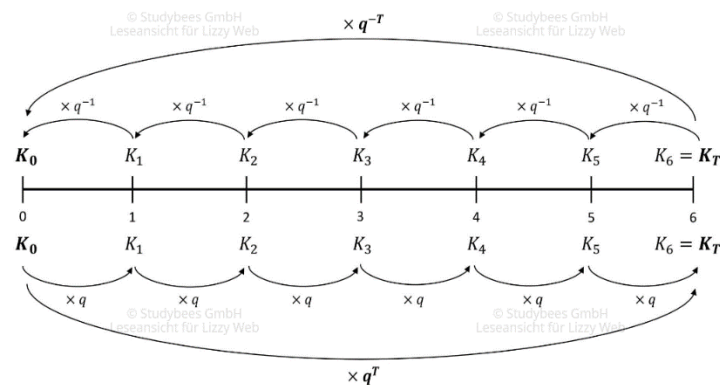
- r : Periodenzinssatz = $q - 1$ (z.B. 5%) / $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$
- p : Zinsfuß = $100 \cdot r$ (z.B. 5)
- q : Aufzinsungsfaktor = $1 + r$ (z.B. 1,05)
- K_0 : anfänglicher Stand eines Kapitals/einer Schuld
- K_T : Stand eines Kapitals/einer Schuld am Ende des betrachteten Zeitraums
- ns : nachschüssig = vorschüssig $\cdot q^{-1}$
- vs : vorschüssig = nachschüssig $\cdot q$
- **BW**: Barwert; welches anfängliche Kapital K_0 wird in $t = 0$ benötigt, um bei gegebener Verzinsung einen bestimmten Kapitalbestand K_T in T Jahren zu erreichen (d.h. gegeben K_T wird K_0 gesucht \rightarrow **Abzinsen**), $K_0 = K_n \cdot (1 + r)^{-n}$
- **EW**: Endwert; zukünftiger Wert von Zahlungen unter Annahme einer bestimmten Verzinsung. Der Endwert ist der Wert einer Zahlung, die für n Jahre zum Zinssatz i angelegt worden ist (d.h. gegeben K_0 wird K_T gesucht \rightarrow **Aufzinsen**)

Zinssätze:

- **Nominalzins r** : gibt an, wie viele Zinsen auf eine Kreditsumme gezahlt werden müssen; **Kreditbetrag \times Zinssatz $\div 100 =$ Zinskosten**
- **Effektiver Jahreszins r_{eff}** : dient zur Vergleichbarkeit unterjähriger Verzinsungen; „Wie hoch müsste der eff. Jahreszinssatz sein, damit dasselbe Endkapital erreicht wird, wie bei unterjähriger Verzinsung?“ - tatsächliche Verzinsung/Gesamtkreditkosten; mit Bearbeitungs-/ Versicherungsgebühren etc;
 $r_m = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m - 1$
- **Nomineller Jahreszinssatz u** : kein Zinseszins, **unterjährig!!!** $r_{\text{eff}} \geq u = \ln(q)$

	Art der Zinskapitalisierung	Aufzinsungsfaktoren für $t = 1, 2, 3$
Geometrische Verzinsung (Exponentielle Verzinsung)	jährlich	$(1 + r)^t$
Lineare Verzinsung (Einfache Verzinsung)	jährlich (nur anfänglicher Kapitalbetrag wird verzinst)	$1 + t \cdot r$
Unterjährige Verzinsung (m-tel jährliche Zinskapitalisierung bei linearer Aufteilung des Zinssatzes)	z.B. halbjährlich	$\left(1 + \frac{u}{2}\right)^{2 \cdot t}$
	z.B. vierteljährlich	$\left(1 + \frac{u}{4}\right)^{4 \cdot t}$
	m-tel jährlich	$\left(1 + \frac{u}{m}\right)^{m \cdot t}$
Kontinuierliche Verzinsung (Stetige Verzinsung, Grenzfall der unterjährigen Verzinsung)	kontinuierlich	$(e^u)^t = e^{u \cdot t}$

Zusammenhang Barwert und Endwert:



b) Geometrische Verzinsung (= Verzinsung mit Zinseszins, exponentielle Verzinsung)

Berechnung des **Endwertes** K_T eines Kapitals K_0 nach T Perioden:

$$K_T(r) = K_0 * (1 + r)^T = K_0 * q^T$$

Berechnung des **Barwertes** K_0 eines Kapitals K_T vor T Perioden:

$$K_0(r) = K_T * (1 + r)^{-T} = K_T * q^{-T}$$

Variante: **jährlich variierende Zinssätze** (Zinsstaffel)

- Endwert: $K_T(r_1, \dots, r_T) = K_0 * (1 + r_1) * \dots * (1 + r_T) = K_0 * \prod_{t=1}^T (1 + r_t)$
- Barwert: $K_0(r_1, \dots, r_T) = \frac{K_T}{(1 + r_1) * \dots * (1 + r_T)} = K_T * \prod_{t=1}^T (1 + r_t)^{-1}$
- Beispiel:
 - Anlage von 15.000€ über 3 Jahre; **Zinssatz Jahr 1: $r_1 = 6\%$, Jahr 2: $r_2 = 4\%$, Jahr 3: $r_3 = 3\%$**
 - Endwert nach 3 Jahren: $K_3(0,06, 0,04, 0,03) = 15.000 * (1 + 0,06) * (1 + 0,04) * (1 + 0,03) = 17.032,08$

c) Lineare Verzinsung (= zeitproportionale Verzinsung)

Berechnung des **Endwertes** K_T eines Kapitals K_0 nach T Perioden:

$$K_T(r) = K_0 * (1 + r * t)$$

Berechnung des **Barwertes** K_0 eines Kapitals K_T vor T Perioden:

$$K_0 = \frac{K_t}{(1+t*r)}$$

- **Kein Zinseszinseffekt**, erwirtschaftete Zinsen werden ausgezahlt
- Anfangskapital + $t * \text{Zinsen/Jahr}$

d) Unterjährige geometrische Verzinsung

Berechnung des **Endwertes** K_T eines Kapitals K_0 nach m Perioden und T Jahren:

$$K_T = K_0 * \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{mT} = K_0 * (1 + r_m)^T$$

Berechnung des **Barwertes** K_0 eines Kapitals K_T vor m Perioden:

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + \frac{u}{m}\right)^{mT}} = K_T * \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{-T * m} = K_T * (1 + r_m)^{-T}$$

- Zinsen werden in kürzeren Fristen zugeschlagen -> das Jahr wird in **m** äquidistante Perioden unterteilt, z.B. $m = 4$ bei vierteljährlicher Verzinsung
- Nomineller **Jahreszinssatz** u , entspricht einem unterjährigen Zinssatz von $\frac{u}{m}$
- effektiver/äquivalenter Jahreszins: $r_m = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^m - 1$
 - effektiver Jahreszins = Gesamtkreditkosten; mit Bearbeitungs-/Versicherungsgebühren etc
 - Buch S.122
- Berechnung Zinstage: $[\text{Tag (Datum 1)} - \text{Tag (Datum 2)}] + [\text{Monat (Datum 1)} - \text{Monat (Datum 2)}] + [\text{Jahr (Datum 1)} - \text{Jahr (Datum 2)}]$

e) Kontinuierliche Verzinsung (= zeitstetige Verzinsung)

Berechnung des **Endwertes** K_T eines Kapitals K_0 nach T Perioden:

$$K_T = K_0 * e^{u*T}$$

Berechnung des **Barwertes** K_0 eines Kapitals K_T vor T Perioden:

$$K_0 = K_T * e^{-u*T}$$

- Das Jahr wird in **unendlich viele äquidistante (abstandsgleiche) Perioden** unterteilt ($m \rightarrow \infty$), d.h. die Zinsen werden **kontinuierlich** zugeschlagen (= "jede Sekunde")
- **Jahreszinsrate u** ; entspricht einer effektiven jährlichen Verzinsung zum Zinssatz r , wobei gilt: $K_T = K_0 * e^{uT}$ $r_{eff} = e^u - 1$

f) Gemischte Verzinsung

- Bei Anlagen, die sich über mehrere Jahre erstrecken (inklusive Jahresbruchteile im ersten und letzten Jahr)

Es gilt: **Jahresbruchteile werden linear verzinst, ganze Jahre geometrisch**

Beispiel:

- Anlage von 15.000€ vom 24.09.2012 bis zum 03.04.2018
- Zinskonvention 30/360
- Zinssatz $r = 6\%$ p.a.
- **Jahresbruchteil 2012: 97 Tage, Jahresbruchteil 2018: 92 Tage** → linear
- dazwischen liegen **5 Jahre** → geometrisch

$$K_T = 15.000 * \left(1 + 0,06 * \frac{97}{360}\right) * 1,06^5 * \left(1 + 0,06 * \frac{92}{360}\right)$$

g) Zinsberechnung bei unterjährigen Zinsperioden

Sonderfall: Welcher Zinsbetrag fällt an, wenn ein geometrischer Jahreszins ausgemacht wurde und x Tage seit der Anlage von K_0 vergangen sind?

Berechnung zu einem Zeitpunkt t , der (unterjährig) zwischen $t = 0$ und $t = T$ liegt

$$t = \frac{\text{Zinstage der Laufzeit (t)}}{\text{Zinstage pro Jahr}}$$

- Möglichkeit 1: **taggenaue Zinsverrechnung** (geometrisch):

$$K_t = K_0 * (1 * r)^t$$

- Möglichkeit 2: **zeitproportionale Aufteilung; gemischte Verzinsung** der p.a.-Zinsen (linear): **APPROXIMATION**

$$K_t = K_0 * (1 + t * r)$$

Beispiel:

Anlage von 15.000€ vom 01.01.2018 bis zum 31.03.2018; Zinskonvention 30/360;

Zinssatz $t = 6\%$ p.a. \rightarrow Jahresbruchteil: 90 Tage $\rightarrow t = \frac{90}{360}$

- Möglichkeit 1: $K_t = 15.000 * (1 + 0,06) \frac{90}{360} = 15.220,11$
- Möglichkeit 2: $15.000 * (1 + \frac{90}{360} * 0,06) = 15.225$

3. Bewertung von Zahlungsströmen

a) Barwert von Zahlungsströmen

- **Barwert** eines Zahlungsstroms $Z = \{z_1, \dots, z_T\}$ = Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen:

$$K_0(r) = z_1 * q^{-1} + z_2 * q^{-2} + \dots + z_{T-1} * q^{-(T-1)} + z_T * q^{-T} = \sum_{t=1}^T z_t * q^{-t}$$

- **Materielle Interpretation des Barwertes:**

Wenn der Barwert eines Zahlungsstroms t_0 zu Kapitalmarktbedingungen angelegt wird, erhält man am Ende der Laufzeit denselben Wert wie bei Anlage des Zahlungsstroms.

- **Finanzmathematisches Äquivalenzprinzip:** unterschiedlich hohe Zahlungen können zu unterschiedlichen Zeitpunkten durchaus gleichwertig sein, wenn sie nach "Abzinsung" denselben Barwert haben

b) Kapitalwert (= net present value) einer Investition

- **Standardinvestition:** Kapitalwert = Barwert der Zahlungen bzw. Summe aus Anfangssituation und abgezinsten Einzahlungsüberschüssen (Einzahlung – Auszahlung), dh.

$$K_0(r) = -az_0 + \text{Rückfluss1}/q + \text{Rückfluss2}/q^2 + \text{Rückflussn}/q^n$$

- KW ($t=0$) = Barwert (in unserem Kurs)
- Merkmale einer **Investition:** Anfangsauszahlung az_0 in $t = 0$, danach Folge von Zahlungen z_0
- **Endwert der Rückflüsse > Endwert der Auszahlung -> Investition vorteilhaft**
- **Kapitalwertkriterium:**

Wenn $K_0 > 0$, dann ist es vorteilhafter, die Investition zu tätigen, als den Investitionsbetrag (= die Anfangsauszahlung) zu Kapitalmarktbedingungen anzulegen.

Wenn $K_0 < 0$, dann ist die Investition unvorteilhaft und sollte nicht durchgeführt werden.

4. Rentenrechnung

a) Grundlagen Rentenrechnung

- Definition **Rente**: **jede Folge von Zahlungen (egal ob Ein- oder Auszahlungen!), die regelmäßig und in konstanter Höhe über einen festen Zeitraum gezahlt werden**

- RBF (Rentenbarwertfaktor): $\frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-T}$

- REF (Rentenendwertfaktor): $\frac{q^T - 1}{q - 1}$

jeweils
nachschüssig

- Ewige Rente = Dividendenzahlung**

- BW ewige Rente vorschüssig: $R * \frac{q}{q - 1}$

- BW ewige Rente nachschüssig: $\frac{R}{q - 1}$

- Zahlung zu Periodenbeginn: **vorschüssig = nachschüssig * q**

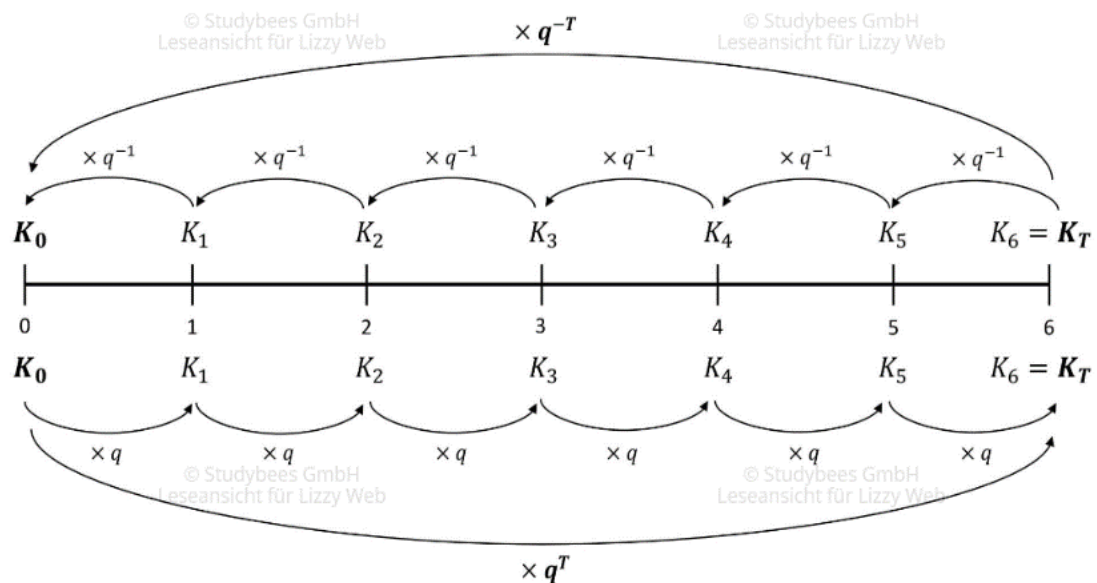


- Zahlung zu Periodenende: **nachschüssig**



- Basisform: gleich hohe Rentenzahlungen (**Annuitäten**) \neq Dynamische Rente

Zusammenhang Barwert und Endwert:



b) Annuitätenrente

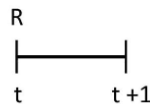
$$EW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^T - 1}{q - 1}$$

$$BW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-T}$$

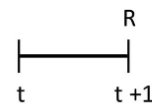
$$EW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q$$

$$BW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-T+1}$$

Vorschüssig:



Nachschüssig:



- Wert Periodenbeginn: R (Vorschüssig) / $R * q^{-1}$ (Nachschüssig)
- Wert Periodenende: $R * q$ (Vorschüssig) / R (Nachschüssig)

c) Dynamische Rente

$$EW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^T - c^T}{q - c}$$

$$BW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * q^{-T}$$

$$EW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * q$$

$$BW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * q^{-T+1}$$

- Eine Rentenzahlung pro Jahr, Laufzeit von T Perioden
- Geometrisch wachsende Zahlungen: R wächst um einen bestimmten Prozentsatz h ($c = 1 + h$), d.h.:

$$z_0 = R, \quad z_1 = R * c, \quad z_2 = R * c^2 \text{ etc.}$$

Beispiel: Rentenzahlung von je 12.000€ über 3 Jahre; der Aufzinsungsfaktor ist $q = 1,04$, also $r = 0,04$; die Rente wächst jährlich um 1,5%

- $T = 3, c = 1 + 0,015 = 1,015$
- $EW_{\text{vorschüssig}} = 12.000 * \frac{1,04^3 - 1,015^3}{1,04 - 1,015} * 1,04 = 39.529,46$

d) Unterjährige Rente

$$EW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - 1}{q^{1/m} - 1}$$

$$BW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - 1}{q^{1/m} - 1} * q^{-T/m}$$

$$EW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - 1}{q^{1/m} - 1} * q^{1/m}$$

$$BW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - 1}{q^{1/m} - 1} * q^{(-T+1)/m}$$

- Rentenzahlungen erfolgen in regelmäßigen Abständen, aber **häufiger als einmal pro Jahr**, z.B. monatlich $m = 12$ / vierteljährlich $m = 4$
- äquidistanter **monatlicher Aufzinsungsfaktor** $q_M = q^{1/m}$
- $T = \text{Anzahl der Teilperioden}$ (z.B. Monate) **insgesamt**
 - bei monatlicher Rente über 5 Jahren: $T = 5 * 12$

e) Unterjährige dynamische Rente

$$EW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - c^{T/m}}{q^{1/m} - c^{1/m}}$$

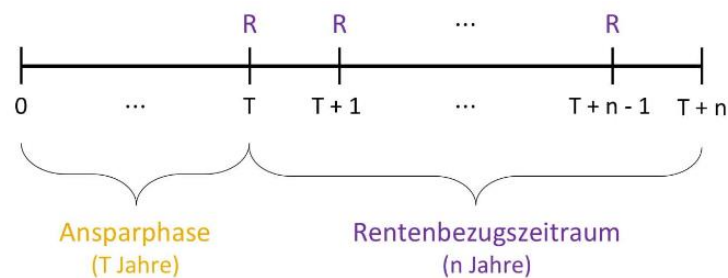
$$BW_{\text{nachschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - c^{T/m}}{q^{1/m} - c^{1/m}} * q^{-T/m}$$

$$EW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - c^{T/m}}{q^{1/m} - c^{1/m}} * q^{1/m}$$

$$BW_{\text{vorschüssig}} = R * \frac{q^{T/m} - c^{T/m}}{q^{1/m} - c^{1/m}} * q^{(-T+1)/m}$$

f) Aufgeschobene Rente

- Erst T Jahre Ansparphase, dann beginnt die Rente über n Jahre
- Welcher Betrag muss in $t = 0$ angelegt werden, um diese Rente zu erhalten?



1. Berechnung des Barwerts der Rente über n Jahre
2. Abzinsung des Barwertes über T Jahr

5. Tilgungsrechnung

a) Annuitätentilgung

Annuitätentilgung: Jedes Jahr werden in variierender Höhe Zinsen gezahlt und ein Teil der Schuld getilgt, die **Summe aus beidem bleibt dabei immer konstant; Rente,** deren Wert dem Kreditbetrag entspricht/Rückzahlkonditionen für Kredit

Notationen:

S_0 Kreditbetrag, Anfangsschuld; BW_{ns} Rente

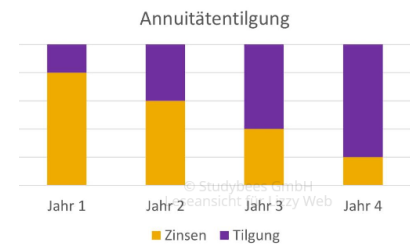
RS_t Restschuld am Ende der Periode t

Z_t Zinszahlung in Periode t

T_t Tilgung in Periode t

A_t Annuität (Zinszahlung + Tilgung) in Periode t

→ **Nachschüssige** Zinsberechnung und Annuitäten



Zusammenhänge

- Annuitäten = Tilgung + Zinsen:**

$$A = T_t + Z_t \quad \text{bzw.} \quad T_t = A - Z_t \quad \text{bzw.} \quad Z_t = A - T_t$$

- Zinsen pro Periode = Zinssatz * Restschuld am Anfang der Periode:**

$$Z_t = r * RS_{t-1}$$

- Anfangsschuld/Barwert Schulden = Barwert der Annuitäten (nachschüssig) über T Jahre (Laufzeit):**

$$S_0 = BW_A^n = A / (r) * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-T}$$

➤ Umformung nach A: $A = S_0 * \frac{q^T * r}{q^T - 1}$

- Restschuld in t:** S_0 in t minus bis dahin gezahlte Annuitäten:

$$RS_t = S_0 * \frac{q^T - q^t}{q^T - 1} = S_0 * q^t - A * \frac{q^t - 1}{q - 1}$$

wenn T
ganzzahlig

wenn T nicht-
ganzzahlig

b) Tilgungsplan

Aufbau eines Tilgungsplans -> Immer nachschüssig ausfüllen!!

t	S_0 / RS_{t-1}	Z_t	T_t	A_t	RS_t
1	S_0	Z_1	T_1	A	RS_1
2	$RS_{2-1} = RS_1$	Z_2	T_2	A	RS_2
3	$RS_{3-1} = RS_2$	Z_3	T_3	A	RS_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

→ Formel für die **Kreditlaufzeit T:** $T_{ns/vs} = \frac{\ln(A * q) - \ln(A * q - S_0 * r)}{\ln(q)}$

6. Kursrechnung

a) Fairer Kurs

Der faire Preis eines Finanzinstituts entspricht seinem **Barwert der Rückflüsse** unter Marktzins r .

Spezialfälle:

- Standardbond** (Zahlungsstrom der Rückzahlungen: $Z = \{Z, \dots, Z, Z + N\}$, Zinsen berechnen sich über den Nominalzinssatz i)

→ Der faire Preis ergibt sich durch Diskontierung aller Rückzahlungen auf t_0 :

$$P_0(r) = Z * (q^{-1} + q^{-2} + \dots + q^{-T}) + N * q^{-T} = \text{Barwert nachschüssig} + N/q_T$$

Zusammenhang zwischen Nennwert N und Preis P :

Wenn r (Marktzins) = i (Zins des z.B. Bonds), dann $P_0(r) = N$ (zu pari)

Wenn $r < i$, dann $P_0(r) > N$ (über pari)

Wenn $r > i$, dann $P_0(r) < N$ (unter pari)

- Zerobond** (wie oben, aber ohne Zinszahlungen während der Laufzeit)

→ nur der Nennwert muss abgezinst werden, d.h.:

$$P_0(r) = N * q^{-T}$$

b) Fairer Wert von Aktieninvestments

- unendlicher Zeithorizont, d.h. es wird von unendlichen Dividendenzahlungen D_t ausgegangen = **ewige Rente**
- Dividendenzahlungen haben entweder eine gleichbleibende Höhe oder wachsen um einen **konstanten Wachstumsfaktor g**
- Berechnung des fairen Werts über das **Gordon-Growth-Modell**:

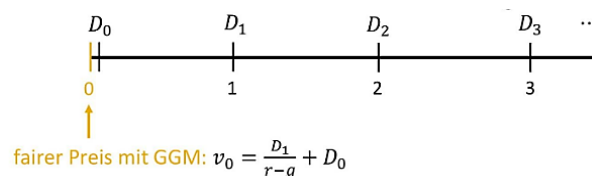
$$v_0 = \frac{D_1}{r-g} \quad (v_0 = \frac{D_0(1+g)}{r-g})$$

→ Gordon-Growth-Modell

Zwei Varianten möglich:

- Wir befinden uns kurz **vor** einer Dividendenausschüttung in

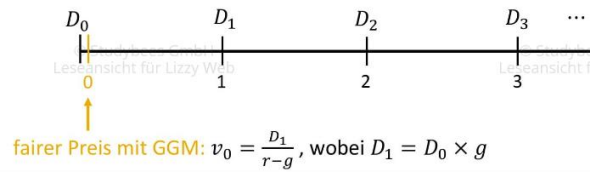
$t = 0$



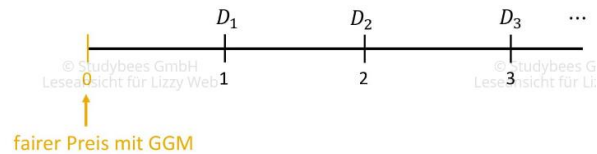
$$\text{bzw. } v_0 = \frac{D_0}{r-g} * (1 + g)$$

2. Wir befinden uns kurz **nach** einer Dividendenausschüttung in

$t = 0$



→ Entspricht ebenfalls dem Barwert einer **ewigen Rente**



Ewige Rente

- g = Wachstumsrate
- D_1 = 1. Dividende, die gezahlt wird
- $D_t = D \cdot (1 + g)^t$
- V_0 = fairer Wert der Aktie, Barwert einer ewigen Rente = $\frac{D_0 \cdot (1 + g)}{r - g}$

Barwert ewige vorschüssige Rente: $R \cdot \frac{q}{q-1}$

Barwert ewige nachschüssige Rente: $\frac{R}{q-1} = \frac{R}{r}$

7. Renditenrechnung

a) Grundlagen

- **Rendite** = tatsächliche Kapitalrentabilität (**Wertzuwachs**)
- Macht alternative Investment- und Finanzierungsangebote mit unterschiedlichen Konditionen miteinander vergleichbar
- Bsp. Einperiodiges Investment: → **zeitdiskret**

$$\begin{array}{c}
 v_0 \qquad \qquad v_1 \\
 | \qquad \qquad | \\
 0 \qquad \qquad 1
 \end{array}
 \quad \rightarrow \text{Rendite } r = \frac{v_1 - v_0}{v_0} = v_1/v_0 - 1 \quad (v_1 = v_0 * (1 + r))$$

- **Zeitstetig:** $u = \ln(v_1/v_0)$ ($v_1 = v_0 * e^u$)
- **Wiederanlageproblematik:** Um zwischenzeitlich Rückflüsse für die Berechnung der Rendite richtig bewerten zu können, muss eine Annahme darüber getroffen werden, **wie** diese Rückflüsse bis T angelegt werden können; nur gleich, wenn wir die Rückflüsse auch zur internen Rendite anlegen können

b) Endfällige Investments

- **Keine Rückflüsse** während der Laufzeit, Kapital wächst meist sukzessive von v_0 auf v_1, v_2, \dots, v_T an
- Gesucht wird die **annulierte** (d.h. auf ein Jahr „heruntergerechnete“) Rendite des Gesamtinvestments
→ Dazu müssen die einperiodigen Renditen bekannt oder berechnet worden

$$\text{sein: } r_t = \frac{v_t - v_{t-1}}{v_{t-1}}$$

- **Kapitalgewichtete Rendite**

$$v_1 = v_0 * (1 + r_1)$$

- Geometrisch annualistische/**zeitgewichtete Rendite** (r_G)

$$r_G = \sqrt[T]{(1 + r_1) * \dots * (1 + r_T)} - 1 \quad \leftrightarrow \quad \sqrt[T]{1 + r(0, T)} - 1$$

- **Arithmetisch annualistische Rendite**

$$r_A = \frac{1}{T} * (r_1 + \dots + r_T)$$

→ Die arithmetisch annualistische Rendite liefert systematisch nicht das korrekte Ergebnis!

c) Mehrperiodige Investments

... mit zwischenzeitlichen Rückflüssen; Bsp. Standardinvestment: $Z = \{-az_0, z_1, \dots, z_T\}$

- **Durchschnittliche Rendite** (**nicht korrekt!**)

$$r_D = \frac{1}{T} * \frac{\sum_{t=1}^T z_t - az_0}{az_0}$$

→ **Wiederanlageprämisse:** Rückflüsse werden zu 0% angelegt; Geld daheim in Spardose

- **Interne Rendite/Interner Zinsfuß/Effektivzins**

→ derjenige Zinssatz, bei dem der Kapitalwert des Investments bei exponentieller Verzinsung = 0 ist, bzw. Leistung = Gegenleistung zum **gleichen Zeitpunkt** (!Gegenleistung bedeutet nicht Rückzahlung, sondern gegenüber der Leistung zu vergleichende Zahlungsmöglichkeit)

Endwertvariante:

$$K_T(r) = az_0 * (1+r)^T = \sum_{t=1}^T z_t * (1+r)^{T-t} \rightarrow -az_0x^2 + z_1x + z_2x = 0$$

wenn ich das Geld einfach anlege, ohne Rückflüsse zu investieren

wenn ich investiere und die Rückflüsse anlege

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

→ Ich zinse alle Rückflüsse inklusive Anfangsinvestition auf den Kapitalwert ab

Barwertvariante:

$$K_0(r) = -az_0 + \sum_{t=1}^T z_t * (1+r)^{-t} = 0$$

→ **Wiederanlageprämisse:** Rückflüsse können zur internen Rendite angelegt werden, „Was mache ich mit meinen Renditen?“ -> Koks und Nuten...?

- **Kein richtig oder falsch, so lange ich die Wiederanlage definiere**

→ **Interne-Rendite-Kriterium:** Eine Investition ist vorteilhaft, wenn $r_I > r$ gilt, wobei r = Marktzins

d) Modifizierte interne Rendite (Baldwin-Verzinsung)

Problem: Der tatsächlich realisierbare Wiederanlagezins muss berücksichtigt werden

→ Modifizierte interne Rendite

Lösung:

1. Wiederanlagezinssatz r_0 festlegen; **IST SCHON IN AUFGABE VORGEGEBEN**
2. **Endwert der Rückflüsse** bei Anlage zu r_0 berechnen (v_T)
3. Den Zinssatz berechnen, unter dem die Anfangsinvestition auf diesen Endwert anwächst

$$\rightarrow az_0 * (1+r_B)^T = \sum_{t=1}^T z_t (1+r_0)^{T-t}$$

$$\rightarrow v_0 * q_B^T = \text{Rückfluss 1} * q + \text{Rückfluss 2} * q \dots + \text{Rückfluss t} (v_T)$$

$$\rightarrow r_B = \sqrt[T]{\frac{v_T}{az_0}} - 1$$

e) Rendite von Fondsinvestments

- **Thesaurierende Fonds:** Auszahlungen finden nur statt, wenn ein Investor desinvestiert; Einzahlungen finden statt, wenn neues Geld in den Fonds investiert wird
- Einperiodige Rendite: ($z_T = \text{Ein- bzw. Auszahlung im Zeitpunkt } t$):

$$r_T = \frac{v_t}{v_{t-1} + z_{t-1}} - 1$$

- **Annualisierte zeitgewichtete Rendite** (misst die Performance des Fondsmanagers)
 - Ist unabhängig von Einlagen und Entnahmen

$$r_{ZGR} = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T (1 + r_t)} - 1$$

- **Kapitalgewichtete Rendite** (misst die Gesamtpformance des Fonds)
 - Wie interne Rendite: Kapitalformel nach r_1 umstellen
 - Keine Rückflüsse, d.h. Wiederanlageproblematik vernachlässigbar