

1. Kapitel : Funktionen

1.1 Definition

Eine Funktion beschreibt die Beziehung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei Mengen, wobei einem Element des Definitionsbereichs genau ein Element des Wertebereichs zugeordnet wird.

♥ Definitionsbereich: Menge (an x -Werten) für die die Funktion definiert ist

♥ Wertebereich: Menge der Funktionswerte, wenn man alle Elemente des Definitionsbereichs einsetzt

... man unterscheidet:

- surjektiv: eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt surjektiv, wenn jedem $y \in$ Wertebereich mindestens ein Element des Definitionsbereichs zugeordnet werden kann. („ y mind. 1x getroffen“)

Prüfungsverfahren: (nicht graphisch)

> „sei $y = f(x)$ (\in des Wertebereichs)“

1. auflösen nach $x = \underline{\hspace{2cm}}$
2. vergleiche x mit Definitionsbereich

- injektiv: eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ heißt injektiv, wenn jedem $y \in$ Wertebereich höchstens ein Element des Definitionsbereichs zugeordnet werden kann.

Prüfungsverfahren:

> „sein $a, b \in \mathbb{R}$ und $f(a) = f(b)$ “

1. gleichsetzen
2. auflösen nach $a = b$
3. vergleichen mit Definitionsbereich

♥ bijektiv: ... surjektiv **und** injektiv („genau ein“)

1.2 Umkehrfunktion:

> die Umkehrfunktion von $f(x)$ ordnet jedem Element des Wertebereichs genau ein Element des Definitionsbereichs zu.

$$> f^{-1}(f(x)) = x$$

oder: $f^{-1} \hat{=}$ der Umformung von $f(x)$ nach: $x = \dots$

(! graphisch $\hat{=}$ die Umkehrfunktion der Spiegelung der Funktion an der ersten WHB [im ersten Quadranten liegend; 45°])

2. Kapitel: Grenzwerte, Stetigkeit, Differenzierbarkeit

2.1 Funktionale Grenzwerte

2.1.1 definition

> gegeben $f(x)$; x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ Grenzwert, gegen den die Funktion konvergiert
beidseitige Annäherung an x_0 .

Dieser Ausdruck bedeutet, dass $f(x)$ gegen A konvergiert, also beliebig nah am Grenzwert A gewählt werden kann, wenn x hinreichend nah an x_0 gewählt wird.

- es gilt:
1. x_0 muss nicht \in des Definitionsbereich sein.
 2. Es bedarf zur Grenzwertbestimmung eine beidseitige Annäherung an x_0 .

linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x^- \rightarrow x_0} f(x) = c$$

$\hat{=}$ x Werten nah an x_0 , aber kleiner x_0 .

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x^+ \rightarrow x_0} f(x) = c$$

$=$ x Werte nah an x_0 aber größer x_0 .

2.1.2 Die Existenz von Grenzwerten

~ formal gilt: $\lim_{x^- \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x^+ \rightarrow x_0} f(x) \iff$ Grenzwert an x_0 existiert

in Worten : wenn der Grenzwert der linksseitigen Annäherung = dem Grenzwert der rechtsseitigen Annäherung (übereinstimmen) dann existiert der Grenzwert von $f(x)$ an der Stelle x_0

2.1.3 Die Nicht-Existenz des Grenzwerts:

> es ist möglich, dass Grenzwerte von Funktionen nicht existieren.

! Fall 1: linksseitiger Grenzwert \neq rechtsseitiger Grenzwert:
 $\lim_{x^- \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x^+ \rightarrow x_0} f(x)$

! Fall 2: die Funktion $f(x)$ strebt gegen $\pm \infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

> Funktionen mit mehreren Variablen ordnen jedem n -dimensionalen Punkt (oder Vektor) aus n Komponenten im \mathbb{R}^n einen Wert im eindimensionalen zu.

♥ somit ist auch der Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen stets eine reelle Zahl. Lediglich wird x_0 nun durch einen Vektor ersetzt.

2.1.3 Rechenregeln für Grenzwerte

~ gegeben sei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ (unterschiedliche Grenzwerte)

1. Addition / Subtraktion

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

2. Multiplikation

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

3. Division

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{A}{B}, \text{ wobei } B \neq 0$$

4. Potenz

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^r = A^r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

2.2 Stetigkeit

~ bisher: ... stetige Funktion, wenn ohne Absetzen vom Stift zeichnenbar („durchgängig“)

2.3.1 Definition

Eine Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn:

- die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist :
- der Grenzwert an der Stelle x_0 existiert :
- der Grenzwert der Funktion an x_0 gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist. :

mathematisch:

- $x_0 \in D$
- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

> ist f an allen $x \in D$ stetig, so ist $f(x)$ eine stetige Funktion.

! die genannten Voraussetzungen gelten auch für die Stetigkeit von Funktionen mit mehreren Variablen.

2.2.2 Eigenschaften von stetigen Funktionen

... sein die Funktionen f und g in x_0 stetig, so gilt:

1. Addition / Subtraktion

$f + g$ / $f - g$ sind stetig in x_0

2. Multiplikation

$f \cdot g$ ($g \neq 0$) ist stetig in x_0

3. Division

$\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) ist stetig in x_0

- außerdem gilt:

... ist eine Funktion durch die Kombination stetiger Funktionen und den folgenden Rechenoperationen: $+$ $-$ \cdot $:$ $^{\circ}$ erzeugbar, so ist auch sie in allen Punkten in denen sie definiert ist, stetig.

VORSICHT:

> reine Polynome sind immer stetig

> aufpassen, bei:

- Wurzelfunktionen

> ohne: $D = \mathbb{R}^+$

> mit Rechenoperation: $D = \mathbb{R}^{\geq}$

- gebrochen rationale Funktionen

> x im Nenner: $D = \mathbb{R} \setminus \{ \}$

- e / \log Funktionen

> wurden niemals ≤ 0 : $D = \mathbb{R}^+$ (ohne 0) / $\mathbb{R}^{>0}$

> Definition und Eigenschaften bezüglich Stetigkeit gelten genau so auch für Funktionen mit mehreren Variablen

Ergänzungen zu Funktionen, Übungsblatt NR. 2

Thema I: Definition – und Wertebereich

(aus Skript, S. 6)

Definitionsbereich = Definitionsmenge: <https://www.youtube.com/watch?v=vae0zt2onTQ>
„Was darf ich für x einsetzen?“ (... damit die Funktion $f(x)$ **reell** ist)

- ... Definitionsbereich betitelt den Bereich, in dem alle Urbilder der Funktion, also alle x -Werte (außer Umkehrfunktion), von denen ein Pfeil ausgeht, enthalten sind.
- Für die meisten „Gleichungstypen“ gilt $D = \mathbb{R}$ = reellen Zahlen.
- Ausnahmen sind:
 - **Wurzelfunktionen:** Diskriminante darf nicht < 0 sein
 - ◊ „gerade Wurzel“ (2./4./6. [...] Wurzel) hat als $D = \mathbb{R}^{\geq}$
 - ◊ Wurzel mit Addition/Subtraktion: $D = \mathbb{R}^{\geq}$ („größer / gleich, kleiner / gleich“ ...)
 - **Gebrochen rationale Funktionen:** die Nullstellen liegen stets außerhalb des Definitionsbereiches, denn man darf nicht durch 0 teilen
 - ◊ Bruchgleichungen mit „ x “ im Nenner: $D = \mathbb{R} \setminus \{ \}$ (Mengenzeichen beachten)
 - **Log oder \ln () – Gleichungen:**
 - $D = \mathbb{R}^{>0}$ (größer / kleiner), denn diese Gleichungen dürfen weder 0 noch eine negative Zahl beinhalten
 - Gleichungen zum Beschreiben von **Flächeninhalt:**
 - $D = \mathbb{R}^{\geq}$

Wertebereich: <https://www.youtube.com/watch?v=bXVHCN4iANk>
„Was wird getroffen“ / „Was kann für $f(x) = y$ rauskommen?“

- ... Wertebereich betitelt den Bereich, in dem alle Bilder der Funktion, also alle getroffenen $f(x) = y$ Werte (außer Umkehrfunktion), enthalten sind.

2.3 Differenzierbarkeit

~ die Ableitung einer Funktion ist der Grenzwert ihres Differenzenquotienten

2.3.1 Definition

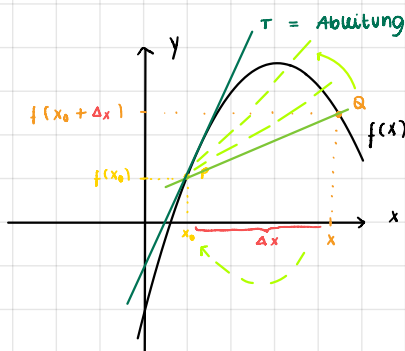
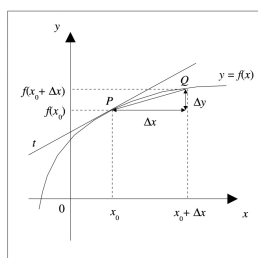
Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und ist gegeben durch den Ausdruck:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient: } \frac{\text{Veränderung Funktionswerte}}{\text{Veränderung } x \text{ Werte dazu}}} \rightarrow \text{zur Existenz des Grenzwerts muss hier gleiches gelten, wie bei funktionalen Grenzwerten}$$

$= \text{STEIGUNG (soll } = 0 \text{ sein) zwischen } x_0 \text{ und } x$

- > wenn dieser Grenzwert existiert, ist die Funktion an x_0 differenzierbar = ableitbar.
- > gibt die Steigung der Tangente der Funktion an x_0 wieder.
- > wenn dieser Grenzwert im gesamten Definitionsbereich existiert, heißt die Funktion differenzierbar.

♥ ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, ist sie dort stetig.
Umgekehrt muss das nicht gelten!



$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

2.3.2 Definition für Funktionen mit mehreren Variablen

Eine reelle Funktion mehrerer Variablen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn folgendes gegeben ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - a' \Delta x}{\|\Delta x\|} = 0$$

$\|\Delta x\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + \dots}$
 für $\Delta x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \end{pmatrix}$

↳ dann existiert kein Rest

a = Vektor und enthält alle **partiellen** Ableitungen der Funktion

> drei Unterschiede zu Funktionen mit einer Variablen:

1. x und x_0 sind nun Vektoren des \mathbb{R}^n
2. Die Ableitung ist demnach auch ein Vektor.
3. Geteilt wird im Differenzenquotient durch die Norm des Vektors Δx

3. Kapitel: (Partielle) Ableitungen

3.1 Bekannte Ableitungsregeln und Sonderfälle

$f(x)$	$f'(x)$
$x^a \ (a \in \mathbb{R})$	ax^{a-1}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^x	e^x
$a^x \ (a > 0)$	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x \ (a > 0)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

♥ SONDERFÄLLE

- $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ > $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
- $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ > $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$ (Quotientenregel) > $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f(x) = e^x$ (Kettenregel) > $f'(x) = e^x \cdot 1$
 $f(x) = e^{3x-5}$ > $f'(x) = e^{3x-5} \cdot 3 = 3e^{3x-5}$
- $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R}$ > $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
- $f(x) = \ln(x)$ > $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 1$
 $f(x) = \ln(2x+3)$ (Kettenregel) > $f'(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot 2 = \frac{2}{2x+3}$
- $f(x) = \log_a x$ mit $a > 0$ > $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = \sin(x)$ > $f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x)$ > $f'(x) = -\sin(x)$

♥ Ableitungsregeln

1. Kettenregel: $f(x) = g(h(x))$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

in Worten: Ableitung äußerer Fkt. (beständige innere Fkt) · Ableitung innere Fkt.

Beispiel: $f(x) = e^{3x-7}$

$$f'(x) = e^{3x-7} \cdot 3 = 3e^{3x-7}$$

2. Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Reihenfolge einzuhalten.

in Worten: Ableitung 1. Fkt · normale 2. Fkt. + normale 1. Fkt · Ableitung 2. Fkt.

Beispiel: $f(x) = \ln(3x) \cdot 3x^2$

$$g(x) = \ln(3x) \quad g'(x) = \frac{3}{3x}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x} \cdot 3x^2 + \ln(3x) \cdot 6x$$

$$h(x) = 3x^2 \quad h'(x) = 6x$$

3. Quotientenregel : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

in Worten : Quotient aus : Produktregel mit umgekehrtem Rechenzeichen
Quadrat zweite Fkt.

3.2 Definition partielle Ableitungen

~ „Ableiten“ : wie ändert sich der Funktionswert wenn sich die einzige Variable x verändert
> bei mehr als einer Variablen müssen die anderen zu dieser Beobachtung folglich konstant gehalten werden

Gegeben sei eine Funktion $y = f(x_1, x_2)$ mit mehreren (2) Variablen.
Dann ist :

- $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1}$ die partielle Ableitung erster Ordnung nach x_1 .
 x_2 wird bei der Ableitung als Konstante betrachtet.

mit Differenzenquotient : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x}$

- $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2}$ ist dann die partielle Ableitung erster Ordnung nach x_2 .
nun wird x_1 bei der Ableitung als Konstante betrachtet.

mit Differenzenquotient : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x) - f(x_1, x_2)}{\Delta x}$

> auch für partielle Ableitungen gelten bisherige Regeln + Sonderfälle.

♥ weil die anderen Variablen als Konstanten zählen gilt für sie in der Ableitung :

- als Addition / Subtraktion : fällt weg
- multiplikativ / als Division verknüpft : beibehalten

3.1.3 partielle Ableitungen höherer Ordnung („m-ter Ordnung, wobei H dann m Spalten“)

> sofern partielle Ableitungen differenzierbar sind, können sie wieder jeweils nach ihren Variablen abgeleitet werden : = „zweiter Ordnung“

f_{xx} $f_{xy} = f_{yx}$ f_{yy} Young's Theorem : sind die partiellen Ableitungen stetig, folgt $f_{xy} = f_{yx} : \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$

... in einer Matrix geschrieben, spricht man von der Hesse Matrix :

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Zeile Spalte

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & f_{x_1 x_3} & \dots \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & f_{x_2 x_3} & \dots \\ f_{x_3 x_1} & f_{x_3 x_2} & f_{x_3 x_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

m Spalten

♥ für partielle Ableitung mit beliebig vielen Variablen gilt :

4. Kapitel : Lineare Funktionen und Tangentialebenen

~ oder auch : zum graphischen Verständnis von Ableitungen

4.1 Darstellungsformen von linearen Funktionen (Tangenten) bei Funktionen einer Variablen

♥ Koordinatenform : $y = bx + a$ (Steigung unabhängig vom x -Wert)

> a, b sind Konstanten :

- a als Schnittpunkt mit y -Achse wenn $x = 0$
- b als Steigung ($= f'(x)$)

♥ Punkt - Steigungsform :

gegeben müssen sein : $P_1(x_1, y_1)$ Steigung b

$$\begin{aligned} > y - y_1 &= b(x - x_1) \quad | + y_1 \\ y &= bx - bx_1 + y_1 \end{aligned}$$

♥ Zwei Punkte Form :

gegeben müssen sein : $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$

$$> \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

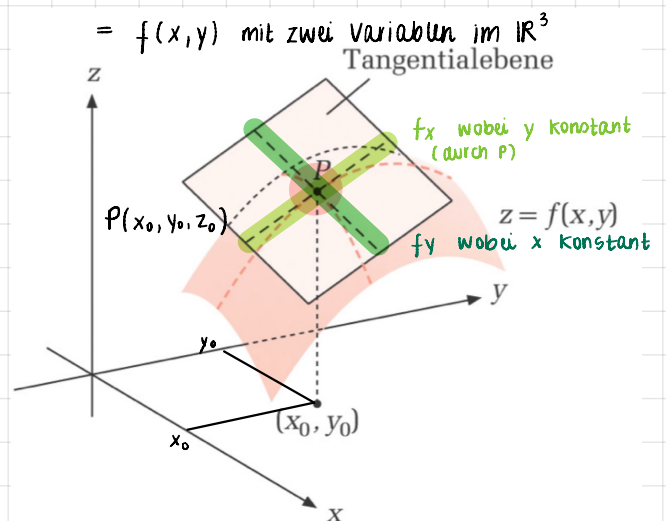
♥ mit Verwendung der Ableitung : $t = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + \underbrace{f(x_0)}_{y\text{-Achsenabschnitt}}$

4.2 Die Tangentialebene bei Funktionen mehrerer Variablen

$$> z = z_0 + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

als Voraussetzung notwendig :

- partielle Ableitung der Funktion nach x, y
- Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ im \mathbb{R}^3



> die Tangentialebene ist die Verallgemeinerung der Tangenten an einem Punkt einer Funktion.

Sie beschreibt alle möglichen Tangenten an einem Punkt P . Die partiellen Ableitungen bilden somit jeweils die Steigung der Tangenten („gleicher Richtung“)

5. Kapitel : mathematisches Handwerkszeug (angewandt auf Funktionen mehrerer Variablen)

5.1 Kettenregel im multivariaten Fall

Gegeben sei die Funktion mit: $z = f(x, y)$ wobei $x = g(s, t)$ ^{gleich} $y = h(s, t)$

die Ableitungen der Funktion nach s, t sind :

$$\frac{\partial f}{\partial s} \text{ (Ableitung nach } s) = f_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial s} + f_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\begin{aligned} \text{in Worten:} \quad &= f_x(x, y) \cdot x_s(s, t) + f_y(x, y) \cdot y_s(s, t) \\ &= g'(s) \quad \quad \quad = h'(s) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} \text{ (Ableitung nach } t) = f_x(x, y) \frac{\partial x}{\partial t} + f_y(x, y) \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} &= f_x(x, y) \cdot x_t(s, t) + f_y(x, y) \cdot y_t(s, t) \\ &= g'(t) \quad \quad \quad = h'(t) \end{aligned}$$

= totale Ableitung

\bullet = partiellen Ableitungen der Hauptfunktion nach jeder vorkommenden Variablen
 \bullet = totale Ableitung nach $s = t_1, t = t_2$ der „Unterfunktion“ :

Allgemein gilt:

♥ sei $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $x_i = g(t_1, t_2, \dots, t_i)$

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = f_{x_1}(x_1, x_2, \dots) \cdot \frac{x_1}{t_i} + f_{x_2}(x_1, x_2, \dots) \cdot \frac{x_2}{t_i} \dots$$

→ durchzuführen für jedes t_i

5.2 Höhenlinien

~ Hintergrund : eine Funktion mit zwei Variablen lässt sich als Graph in drei Dimensionen darstellen :

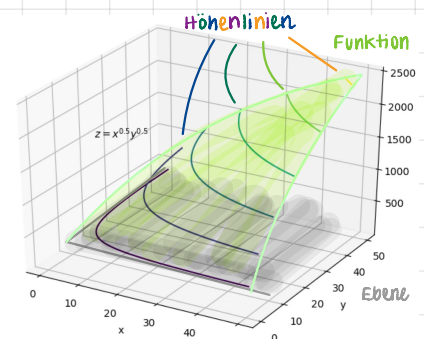
5.2.1 Definition:

Eine Höhenlinie der Funktion $z = f(x, y)$ ist die Menge aller Kombinationen aus x und y im Definitionsbereich, die denselben Funktionswert ergeben. Alle Elemente (Punkte) der Menge lösen die Gleichung:

$$f(x, y) = c$$

graphischer Ansatz:

Höhenlinie = Schnittmenge aus Funktion
im Raum und Ebene II zu x -/ y -Achse.



5.2.2 Steigung und Ermittlung von Höhenlinien

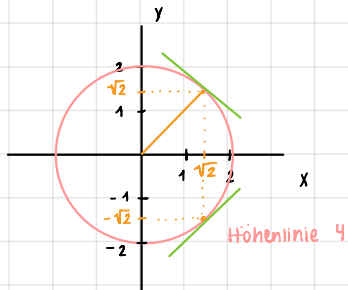
♥ Regel : die Steigung einer Höhenlinie in einem Punkt P
= negativen Quotienten der partiellen Ableitungen.

Erklärungsbeispiel:

> geg: $F(x,y) = x^2 + y^2 = 4$

Folgerung: wegen $F(x,y) = c$ handelt es sich hier um die Höhenlinie γ von $F(x,y)$

Graph :



> Steigung der Höhenlinie („Funktion“) an Punkt
= Tangente \perp durch diesen Punkt

↳ Problem : Höhenlinie = Kreis
= keine richtige Funktion

5.2.3 Implizites Differenzieren (Ableiten) entlang einer Höhenlinie

~ zur Ermittlung der Steigung der Höhenlinie

es gilt: $F(x, y) = c$

$$y = f(x) \rightarrow F(x, f(x)) = c$$

> Ableiten: $\frac{\partial F(x, f(x))}{\partial x} = f_x(x, y) \cdot \frac{dx}{x} + f_y(x, y) \frac{dy}{x} = 0$

$= f_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{dy}{x} \quad | - f_x : f_y$

$\frac{dy}{x} = - \frac{f_x}{f_y} \quad \text{oder:} \quad \frac{dx}{y} = - \frac{f_y}{f_x}$

♥ Allgemein gilt:

geg: $F(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$ $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sind differenzierbar.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \frac{f_{x_i}}{f_z} \quad \text{mit } f_z \neq 0$$

Implizites Differenzieren - das allgemeine Vorgehen

1. Funktionsterm durch Umformung $= 0$ setzen
2. Aufstellen aller möglicher partieller Ableitungen gemäß der Formel:

$$\frac{\partial v_i}{\partial v_j} = -\frac{f_{v_j}}{f_{v_i}} \quad \text{mit } v \text{ für Variable der Funktion ; } f \text{ für partielle Ableitung}$$

3. wenn angegeben: Punkt P in partielle Ableitung einsetzen um so Steigung dort zu berechnen

6. Kapitel : Approximationen

6.1 Die lineare Approximation bei linearen Funktionen

> hier wird der Graph einer Funktion an der Stelle x_0 durch seine Tangente approximiert

6.1.1 Definition / Formel

... für lineare Funktionen mit einer Variablen gilt :

$$t: f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

... für Funktionen mit mehreren Variablen gilt :

$$t: f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x, y) \cdot (x - x_0) + f_y(x, y) \cdot (y - y_0)$$

= die Tangentialebene

6.2 Differentiale

... bisher : lineare Approximation approximiert den Funktionswert an einer Stelle x_0 .

new: das Differential approximiert die Veränderung des Funktionswerts, wenn sich x ausgehend von der Stelle x_0 um Δx verändert

6.2.1 Definition :

der Ausdruck : $dy = f'(x) \cdot dx$ ^{„ Δx “} beschreibt die Veränderung des Funktionswerts.
„ dx “ beschreibt dabei eine Veränderung der Variable x .

→ Herleitung :

$$\text{geg: } \Delta y = \text{tatsächliche Veränderung} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

approximiert mit der linearen Approximation

gilt für die Stelle x_0 und den Wert $x_0 + \Delta x$:

$$\text{b.A: } f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\underline{f(x_0 + \Delta x)} \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0})$$

$$\quad \quad \quad \rightarrow \approx \underline{f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

> einsetzen in die tatsächliche Veränderung $\Delta y = \underline{f(x_0 + \Delta x)} - f(x_0)$

$$\Delta y = \underline{f(\cancel{x_0}) + f'(x_0) \cdot \Delta x} - \cancel{f(x_0)}$$

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x$$

6.2.2 Rechenregeln der Differentiale

geg: Seien f, g differenzierbare Funktionen von x (oder von mehr Variablen) und a, b Konstanten:

1. $d(af + bg) = a \cdot df + b \cdot dg$

2. $d(f \cdot g) = g \cdot df + dg \cdot f$ **Produktregel**

3. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$ für $g \neq 0$ **Quotientenregel**

4. **Kettenregel** für Differentiale: für $z = g(f(x, y))$ ist das Differential:

$$dz = g'(f(x, y)) \cdot \overset{!}{df} > \text{Differential der inneren Funktion ersetzt durch Ableitung}$$

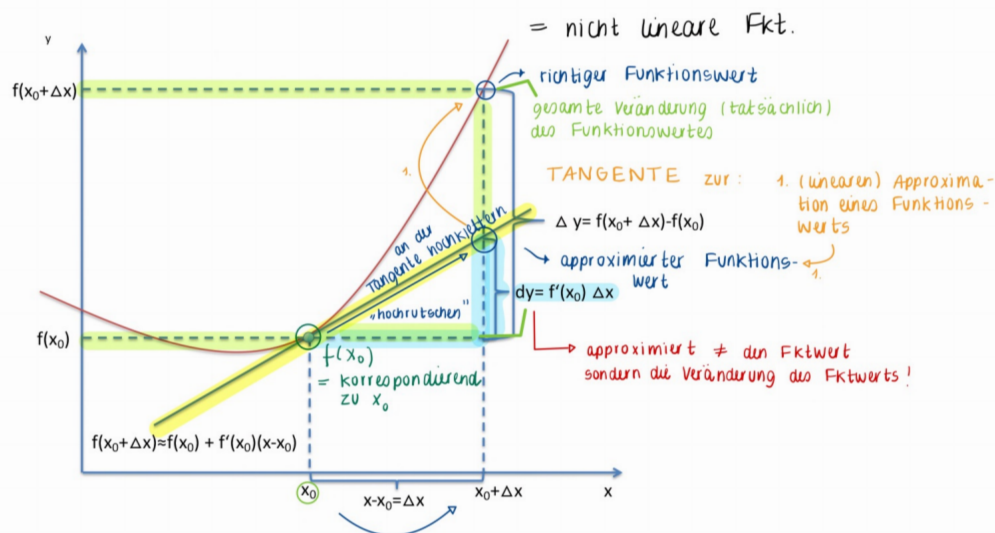
6.2.3 Das Differential von Funktionen mehrerer Variablen

♥ zwei Variablen: $z = f(x, y)$

$$dz = \underbrace{f_x(x, y) \cdot \frac{dx}{\Delta x}}_{y \text{ konstant}} + \underbrace{f_y(x, y) \cdot \frac{dy}{\Delta y}}_{x \text{ konstant}}$$

♥ mehrere Variablen: $z = f(x)$ mit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$dz = f_{x_1}(x) \cdot dx_1 + f_{x_2}(x) \cdot dx_2 + \dots + f_{x_n}(x) \cdot dx_n$$



6.3 Polynomiale Approximation

~ neu : Funktionswert von Polynomen approximieren

6.3.1 Definition / Formel eines Polynoms zweiter Ordnung an x_0 :

$$f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2$$

$$\stackrel{!}{=} f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

6.3.2 Vorgehensweise zur Bestimmung polynomieller Approximationen

~ dazu müssen gewisse Bedingungen (je nach Ordnung des Polynoms) gelten:

- $a_0 = f(x_0)$ > Fkt. und A haben gleichen Funktionswert an x_0
- $a_1 = f'(x_0)$ > Fkt. und A haben gleichen Wert der 1. Ableitung an x_0
- $a_2 = \frac{1}{2} \cdot f''(x_0)$ > Fkt. und A haben gleichen Wert der 2. Ableitung an x_0
- $a_3 = \frac{1}{6} \cdot f'''(x_0)$ > Fkt. und A haben gleichen Wert der 3. Ableitung an x_0
 $= \frac{1}{3!}$
- $a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^n(x_0)$

6.3.3 Die Taylor - Approximation

> die Taylor Approximation zeigt, wie ein Polynom n-ter Ordnung approximiert werden kann (unter Berücksichtigung obiger Schritte)

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

... und für Funktionen mit mehreren Variablen?

! nur ein Fall als Ausnahme betrachtet:

> quadratische² Taylorapproximation von $z = f(x, y)$ (mit zwei Variablen)

$$f(x) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x, y) \cdot (y - y_0)$$

$$+ \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2)$$

6.4 Homogene Funktionen

6.4.1 Definition

Eine Funktion $f(x,y)$ von zwei Variablen x und y mit Definitionsbereich D heißt „homogen vom Grad k “, wenn für alle $x,y \in D$ gilt:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot f(x,y) \quad \text{für alle } t > 0$$

Prüfverfahren:

1. ersetze $x, y \in f$ mit tx und ty
2. ausklammern, sodass nur $f(x,y) \in ()$ übrig bleibt
3. obige Bedingung prüfen

7. Kapitel: Vorwissen zur multivariaten Optimierung

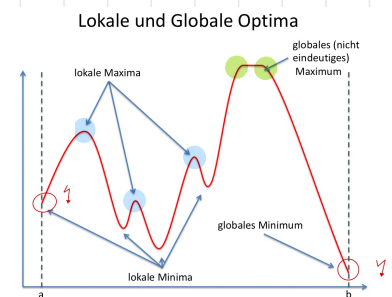
7.1 Extrema und Mengen (als notwendiges Vorwissen)

7.1.1 Definition Extrema

Ein Punkt x^* ist ein :

- ... globales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt: $f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in D$.
- ... striktes globales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt: $f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in D$.
- ... lokales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt: $f(x^*) \geq f(x)$ für alle x nah an x^* .
- ... striktes lokales Maximum für $f(x)$ auf D , wenn gilt: $f(x^*) > f(x)$ für alle x nah an x^* .

(für Aussagen bezüglich Minimum : tausche $\geq / >$ mit $\leq / <$)



7.1.2 Mengen und ihre Eigenschaften

• Mengen und ihre Punkte

geg: Intervall $I \in \mathbb{R}$; Punkt P ; Intervall $A = (p + \delta; p - \delta) =$ „kleine Umgebung von P “

- ein Punkt P ist ein **Randpunkt** des Intervalls I , wenn jedes noch so kleine Intervall A ein Element von innerhalb und außerhalb I besitzt.
- ! Randpunkte müssen selbst kein \in von I sein.
- * ein Punkt P ist ein **innerer Punkt** des Intervalls I , wenn ein δ existiert, sodass A komplett in I liegt.

(bei Mengen im \mathbb{R}^2 entspricht das Intervall einem Kreis.)

Keep in mind :

- > () : Intervallrand $\notin I$
- > [] : Intervallrand $\in I$

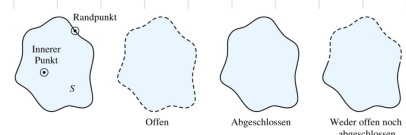
• Mengen sind ...

→ offen, wenn : nur innere Punkte enthält

→ geschlossen, wenn : alle ihre Randpunkte mitbeinhaltet

♥ ACHTUNG :

- > Mengen können beides sein : $\pm \infty$; \emptyset
- > Mengen können weder noch sein : $(4, 5]$



♥ Mengen sind beschränkt,...

→ wenn es einen Intervall gibt, in der die Menge komplett enthalten ist
= beschränkt in \mathbb{R}

→ wenn es einen Kreis gibt, in dem die Menge komplett enthalten ist
= beschränkt im \mathbb{R}^2

Resultat: Mengen sind **kompakt**, wenn

♥ ... sie **geschlossen und beschränkt** ist

7.1.3 der Extremwertsatz von Weierstrass

„Wenn die Funktion $f(x)$ mit $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ innerhalb einer nicht leeren, **kompakten** (= geschlossen, beschränkt) Menge **stetig** ist, dann existiert sowohl eine Stelle x_{\min} mit globalem Minimum als auch eine Stelle x_{\max} mit globalem Maximum der Funktion.“

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \forall x \in K \text{ (D von Menge)}$$

! bei $f(x) = c$ alle x stellen für globale Max. / Min.

! es gibt auch Funktionen deren D \neq kompakt und / oder die nicht stetig ist, aber globale Extrema hat.

8. Kapitel: Multivariate Optimierung

~ mit „Fallunterscheidung“

8.1 Bestimmen von Extrema (je nach Anzahl der Variablen)

1. Schritt: Existenz von Extrema prüfen:

- kompakter (abgeschlossener + beschränkter) Definitionsbereich vorhanden? ✓
- $f(x)$ ist stetig ✓

2. Schritt: Differenzierbarkeit prüfen:

= links - / rechtsseitiger Differenzenquotient gleich?

→ dort wo Fkt. nicht differenzierbar, dort ist Ableitung nicht definiert
(keep in mind: Funktionen können stetig aber nicht differenzierbar an x_0 sein)

3. Schritt: Finden von stationären Stellen + kritischen Punkten

- Fall 1: $f(x)$ enthält eine Variable

stationäre Stellen:

1. Bilde $f'(x)$
2. setze: $f'(x) = 0$
> für $x_n^* = 0$ liegen dort stationäre Stellen

kritische Punkte:

- * Möglichkeit 1: P erhalten durch Prüfen der Differenzierbarkeit
- * Möglichkeit 2: (nachträgliches Prüfen wann $f'(x)$ Ableitung (\neq Funktion) nicht definiert ist)
> Brüche

„es kann ein theoretisches x^* geben
aber prüfen ob $f'(x)$ dafür auch definiert
> falls nein wird aus x^* kritischer P

- Fall 2: $f(x)$ enthält mehr Variablen

stationäre Stellen = kritische Punkte bei $V > 1$

1. Bilde f_x und f_y (partiellen Ableitungen)

2. setze: $f_x = 0$
 $f_y = 0$

> zunächst: umformen nach x / y damit durch Einsetzen nur noch eine Variable

> dann: x / y in eine partielle Ableitung für x^* / y^*

> zuletzt: x^* / y^* wieder in selbige Ableitung

..... = p^*

4. Schritt: globale Extrema bestimmen

- ♥ stationäre Stellen in „ihre“ Ausgangsfunktion $f(x)$ einsetzen
= entsprechenden Funktionswerte)
Vorsicht bei „aufgeteilter“ Fkt.

! bei Intervall: Randpunkte untersuchen

! Kontrolle mit zweiter Ableitung: > 0 : Min
 < 0 : Max

↙ hier lassen sich höchstens **strikte lokale** Extrema bestimmen

- ♥ bei Funktionen mehrerer Variablen bedarf es dazu aber weitere Informationen

zum 4. Schritt der Bestimmung globaler Extrema bei $f(x)$ mit $x > 1$

> zur Bestimmung globaler Extrema bedarf es der Hesse - Matrix und ihrer Definitheit
Woraus folgt:

4.1 Bestimmen der partiellen Ableitung zweiter Ordnung und Aufstellen der Hesse - Matrix

$$\begin{aligned} f_{xx} &= & f_{xy} &= \\ f_{yx} &= & f_{yy} &= \\ H &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Einsetzen jedes stationären Punktes in eine Hesse - Matrix

> $H_{p^*} = \dots$ > ergibt Definitheit = Aussage über Extrema je Punkt

4.3 Bestimmen der Definitheit von H durch führende Hauptminore


! nur bei symmetrischen = „spiegelgleichen“ $n \times n$ - Matrizen gilt diese Definitheitsregel


geg: $M = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & \dots \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$$A_1 = x_1 x_1$$

$$A_2 = (x_1 x_1 \cdot x_2 x_2) - (x_2 x_1 \cdot x_1 x_2)$$

$$(A_3 = \text{„Sarrus Regel“} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline \end{array} \right) \text{ falls gefragt})$$

 = addieren je $(\cdot \cdot \cdot \cdot)$

 = subtrahieren davon je $(\cdot \cdot \cdot \cdot)$

über die Definitheit und ihr Rückschluss auf strikte lokale Extrema

> ist die Hesse Matrix mit stationärem Punkt x_0, y_0

positiv definit : alle führenden Hauptminoren > 0 : $A_i > 0$

= (x_0, y_0) striktes lokales Minimum

negativ definit : führende Hauptminoren ungerader Ordnung < 0
gerader Ordnung > 0

= (x_0, y_0) striktes lokales Maximum

Ergänzungen

- von der Taylor Approximation zweiter Ordnung \rightarrow zur Hesse Matrix

„vorwimen“ vom Vorgehen mit einer V:

$$f'(x) = 0 \quad > \text{stationäre Stelle}^*$$

$$f''(x_0) > 0 \quad \text{Minimum}$$

$$< 0 \quad \text{Maximum}$$

~ die Taylor Approximation (2. Ordnung hier) approximiert Funktionswerte:

> für $f(x, y)$ an der Stelle x_0, y_0 :

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ & + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \right. \\ & \left. + f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \right] \end{aligned}$$

entscheidet über Min/Max

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{1}{2} \cdot \left[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right]$$

anders geschrieben:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (a_{11} v_1^2 + 2 \cdot a_{21} v_1 v_2 + a_{22} v_2^2) \\ & = \frac{1}{2} \cdot (a_{11} v_1^2 + a_{21} v_1 v_2 + a_{12} v_1 v_2 + a_{22} v_2^2) \end{aligned}$$

als Matrix geschrieben:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = H$$

Kofaktoren

definition:

Ein Kofaktor bezieht sich auf ein i, j -tes Element einer Matrix.

$$KF = -1^{(i+j)} \cdot \det(\text{Untermatrix wenn man } i\text{-te Zeile und } j\text{-te Spalte löscht})$$

8.2 Globale Extrema von Funktionen mit mehreren Variablen

~ um auch bei $f(x)$ mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ globale Extrema bestimmen zu können, müssen diese Funktionen genauer klassifiziert werden.

8.2.1 Definition „konvexe Menge“

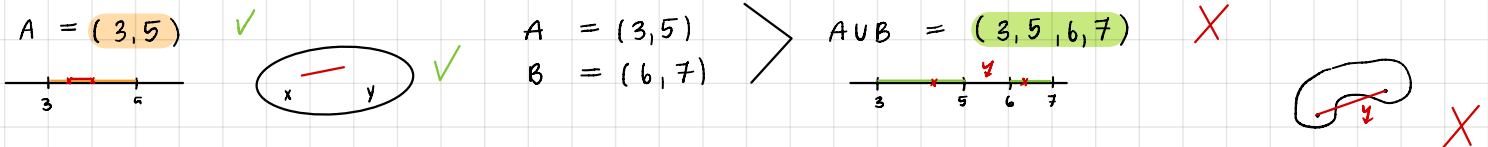
Eine Menge M heißt konvex, wenn für alle $x, y \in M$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ stets gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$$

„konvexe Kombination“

in Worten: eine Menge ist konvex, wenn eine gerade Linie zwischen zwei Punkten dieser Menge komplett in dieser Menge liegt.

veranschaulicht:



8.2.2 Definition: konvexe / konkave Funktion

~ nun hin zu Funktionen

Eine Funktion $f(x)$, die auf einer konvexen Menge definiert = 0 ist, heißt:

- **konvex**, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten = **Steigung $f'(x)$** auf oder überhalb des Funktionsgraphen liegt.

formal: $\forall x, y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$: $f(tx + (1-t)y)$ \leq $t f(x) + (1-t)f(y)$
Funktionswerte Steigung

- **streng konvex**, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten = **Steigung $f'(x)$** dauerhaft überhalb des Funktionsgraphen liegt.

formal: $\forall x, y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$: $f(tx + (1-t)y)$ $<$ $t f(x) + (1-t) \cdot f(y)$
Funktionswerte Steigung

- **konkav**, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten = **Steigung $f'(x)$** auf oder unterhalb des Funktionsgraphen liegt.

formal: $\forall x, y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$: $f(tx + (1-t)y)$ \geq $t f(x) + (1-t) \cdot f(y)$
Funktionswerte Steigung

- **streng konkav**, wenn die Verbindungslinie zwischen zwei Punkten = **Steigung $f'(x)$** dauerhaft unterhalb des Funktionsgraphen liegt.

formal: $\forall x, y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq t \leq 1$: $f(tx + (1-t)y)$ $>$ $t f(x) + (1-t) \cdot f(y)$
Funktionswerte Steigung

Prüfen auf Konvexität / Konkavität: (und nur darauf)

- ♥ Prüfverfahren für reelle, zweifach differenzierbare Funktionen $f(x)$ mit einer Variablen definiert auf einer konvexen Menge M :

die Funktion $f(x)$ ist:

- **konvex** auf M , wenn $f''(x) \geq 0$ für alle inneren Punkte von M .
- **streng konvex** auf M , wenn $f''(x) > 0$ für alle inneren Punkte von M .
- **konkav** auf M , wenn $f''(x) \leq 0$ für alle inneren Punkte von M .
- **streng konkav** auf M , wenn $f''(x) < 0$ für alle inneren Punkte von M .

- ♥ Prüfverfahren für reelle, zweifach differenzierbare Funktionen $f(x)$ mit mehreren Variablen, definiert auf einer konvexen Menge M
(~ es existieren also die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung)

die Funktion $f(x)$ ist:

- **streng konvex** auf M , wenn die Hesse Matrix $H(x)$ für alle $x \in M \in \mathbb{D}$ **positiv definit** ist.
- **streng konkav** auf M , wenn die Hesse Matrix $H(x)$ für alle $x \in M \in \mathbb{D}$ **negativ definit** ist.

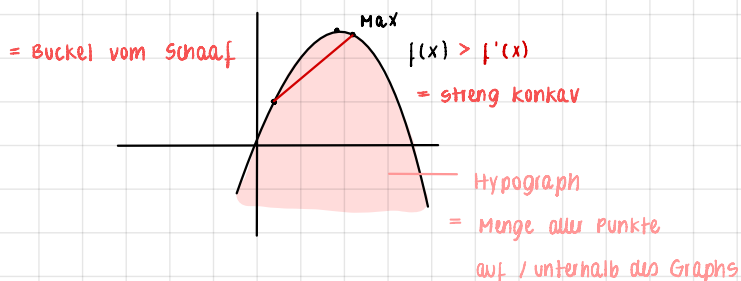
- ♥ wichtige Ergänzung hierzu:

I. wenn f **konkav** (konvex), so folgt: $\ominus f$ ist **konvex** (konkav)
= Spiegelung

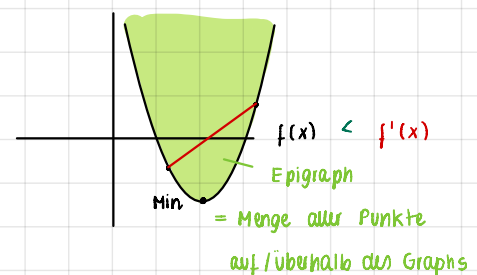
II. wenn f und g **konkav** (konvex), so folgt: Summe $af + bg$ mit $a, b > 0$ ist **konkav** (konvex)

8.2.3 Schaubilder konvexer / konkaver Funktionen

KONKAV \rightarrow ∇ Steigung unterhalb



KONVEX



8.2.4 Der Zusammenhang : Konkavität / Konvexität - globale Extrema

~ für Funktionen $f(x)$ mit mehreren Variablen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

THEOREM:

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, die auf einer konvexen Menge definiert ist.
Wenn $f(x)$

- > **konvex** ist und mind. ein Minimum besitzt, ist jedes lokale Minimum ein globales Minimum.
- * > **streng konvex** ist, existiert entweder KEIN oder EIN Minimum.
- > **konkav** ist und mind. ein Maximum besitzt, ist jedes lokale Maximum ein globales Maximum.
- * > **streng konkav** ist, existiert entweder KEIN oder EIN Maximum.

... somit lässt sich schlussfolgern:

> **konvex** und auf M differenzierbar ist, dann gilt für kritische Punkte

x^* = ein globales **Minimum**

> **konkav** und auf M differenzierbar ist, dann gilt für kritische Punkte

x^* = ein globales **Maximum**

! weil hinreichend - und notwendig können Sattel- / Wendepunkte ausgeschlossen werden

! weiterhin aber zu prüfen: **Randpunkte**