

Zusammenfassung Quantitative Methoden

descriptive & diagnostic analytics = was ist passiert und warum?

→ um Systeme und deren Leistungsfähigkeit (z.B. Gewinn) zu analysieren und zu verstehen

z.B. OLAP, Data Mining, Cluster Analyse, Faktorenanalyse

predictive analytics

= was könnte passieren?

→ um Leistungsfähigkeit von Systemen (z.B. Geschäftserfolg) in Abhängigkeit

z.B. Prognose, Conjoint Analyse, Regression, Zeitreihenanalyse,

Einflussfaktoren erklären und vorhersagen zu können

Choice Modelle, (Simulation), (Neuronale Netze)

prescriptive analytics

= was sollten wir tun?

z.B. (Simulation), (Neuronale Netze), Mathematische Modellierung,

um bessere Entscheidungen zu treffen in komplexen Situationen unter Berücksichtigung

Optimierung, Spieltheorie, Lösungsalgorithmen

Ziellkriterien und Restriktionen

Grundlagen Matrixrechnung

Definitionen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrix

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

$m = \text{Zeilen}$ $n = \text{Spalten}$

$i = \text{Zeile}$ $j = \text{Spalte}$

Hauptdiagonale $i=j$

Vektoren

$m=1$ oder $n=1 = \text{Zeilen/Spaltenvektor}$

alle Komponenten Null = Nullvektor

Spezielle Matrizen

- $m=n$ = quadratisch
- $m=n=1$ = Skalar (wie reelle Zahl behandelt)
- alle Komponenten 0 = Nullmatrix, Lösung = 0
- Hauptdiagonale 1, Rest 0 = Einheitsmatrix E
- 0, außer Hauptdiagonale = Diagonalmatrix (unter Diagonale 0 = obere Dreiecksmatrix)
(ober Diagonale 0 = untere Dreiecksmatrix)
- in jeder Zeile min. eine 0 mehr = Treppentmatrix

Matrixoperationen und Rechenregeln

Transposition A^T

$(m \times n) \rightarrow (n \times m)$ Zeile wird zu Spalte, Spalte wird zu Zeile

Hauptdiagonale bleibt gleich

$$I. (A^T)^T = A$$

$$II. A^T + B^T = (A+B)^T$$

$$III. (A \cdot B \cdot C \cdot D)^T = D^T \cdot C^T \cdot B^T \cdot A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Addition / Subtraktion

komponentenweise

nur bei gleicher Ordnung

$$I. \text{Kommutativgesetz: } A+B = B+A$$

$$II. \text{Assoziativgesetz: } (A+B)+C = A+(B+C)$$

$$III. \text{Existenz neutrales Element: } A+0 = 0+A = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A+B = \begin{pmatrix} 1+1 & -2+3 \\ 3+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplikation

$1 \times 3 \quad 3 \times 2$ jede Zeile mit jeder Spalte

einzelne Komponenten werden addiert

$$I. \text{Assoziativgesetz}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$II. \text{Existenz E}$$

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

$$III. \text{Distributivgesetz}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B+C)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 12 \\ 11 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 10 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 13 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 10 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 68 \\ 122 & 167 \end{pmatrix}$$



Skalarmultiplikation

Skalar mit jeder Komponente

immer möglich

$$I. \text{Kommutativ: } k \cdot A = A \cdot k$$

$$II. \text{Assoziativ: } (k \cdot l) \cdot A = k \cdot (l \cdot A)$$

$$III. \text{Existenz neutrales Element: } 1 \cdot A = A$$

$$IV. \text{Distributiv 1: } k \cdot A + k \cdot B = k \cdot (A+B)$$

$$V. \text{Distributiv 2: } A \cdot k + A \cdot l = A \cdot (k+l)$$

$$k=2$$

$$\rightarrow k \cdot A = 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Potenzbildung

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$I. \text{Potenzgesetz 1: } A^b \cdot A^c = A^{b+c}$$

$$I. A \cdot A = A^2$$

$$II. \text{Potenzgesetz 2: } (A^b)^c = A^{b \cdot c}$$

$$II. A^2 \cdot A = A^3$$

Heruntergeladen von



Lineare Gleichungssysteme in Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 15 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 15 \\ 5x_1 + 5x_2 - x_3 &= 15 \end{aligned}$$

in Matrixform $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$ bzw. als partitionierte Matrix $\rightarrow (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -1 & 3 & 15 \\ 5 & 5 & -1 & 15 \end{array} \right)$

homogenes LGS = Ergebnisspaltenvektor $b = 0$

inhomogenes LGS = Ergebnisspaltenvektor $b \neq 0$

EZU's

- Multiplikation mit einem Skalar (z.B. 3)
- vertauschen zweier Zeilen (z.B. II \leftrightarrow III)
- Addition/Subtraktion zweier kompletter Zeilen (die zu verändernde Zeile zuerst nennen) (z.B. I + III)
 \rightarrow wenn mehrere EZU's in einem Schritt III_n = neue/veränderte Zeile

Gauß/Jordan-Algorithmus durch Pivotisierung

Matrix wird durch EZU's so umgeformt, dass möglichst viele Spalten nur ein Element enthalten, welches nicht = 0 ist.

- Pivotelement wählen ($\neq 0$) nicht in einer Zeile oder Spalte wählen, in der bereits ein Pivotelement vorhanden ist!
 streng: Pivotelement muss zu 1 umgeformt werden.
- alle anderen Komponenten der Spalte zu 0 umformen mit EZU's
- Pivotelement aus nächster Zeile/Spalte auswählen \rightarrow vervollständigen

Gauß-Algorithmus

- Umformen in Treppennorm mit EZU's (unter Hauptdiagonale werden alle Komponenten zu 0 umgeformt)
- Rücküberführung in Gleichungssystem
- Gleichungssystem auflösen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Weiterführende Matrixrechnung

Determinante $\det(A)$ Matrix muss quadratisch sein

bei 2x2 Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

bei 3x3 Matrix (Sarrus Regel)

1. Spalte 1 und 2 rechts neben Matrix schreiben

2. Addieren der Produkte der Elemente von links oben nach rechts unten

3. Subtrahieren der Produkte der Elemente von rechts oben nach links unten

$$\det(E) = 1$$

\det (Dreiecksmatrix) = Produkt der Hauptdiagonale

enthält Nullzeile/Spalte $\rightarrow \det(A) = 0$

Zeilen/spaltenvektoren linear abhängig $\rightarrow \det(A) = 0$

$$I. \det(A^T) = \det(A)$$

$$II. \det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$$

$$III. \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

bei größeren Matrizen:

I. Umformung in Treppennorm mit EZU's

IIa. Vereinfacht: $\det =$ Produkt der Hauptdiagonale

IIb. Berücksichtigung der EZU Auswirkungen:

I. pro Zeilentausch 1x Vorzeichenwechsel des \det

II. Zeile \cdot Skalar $c \rightarrow \det(A)$ ändert sich um Faktor c

III. +/- eines Vielfachen einer Zeile zu anderer Zeile (II + 3 \cdot III) $\rightarrow \det(A)$ verändert sich nicht

IV. +/- \cdot Skalar $c \rightarrow \det(A)$ ändert sich um Faktor c

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Inverse A^{-1} Matrix muss quadratisch sein

$\det \neq 0 \rightarrow$ Inverse existiert \rightarrow regulär

$\det = 0 \rightarrow$ keine Inverse \rightarrow singulär

besitzt Inverse wenn quadratische Matrix B existiert so, dass $A \cdot B = E$ und $B \cdot A = E$ gilt

$$I. (A^{-1})^{-1} = A$$

$$II. (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$III. (c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{-1} \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$IV. (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$V. \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$VI. A^{-1} + B^{-1} \neq (A+B)^{-1}$$

Inverse einer (1×1) -Matrix $A = (a) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: A^{-1} = (1/a)$

Inverse einer (2×2) -Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \forall (a \cdot d - b \cdot c) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: B^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

bei größeren Matrizen:

mit Gauß/Jordan Algorithmus umwandeln von

$$(A|E) \text{ zu } (E|A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} A \text{ mit EZU's zu } E \text{ umformen} \\ \text{rechts wird zu } A^{-1} \end{array}$$

oder Matrix ist singulär (\rightarrow links entsteht Nullzeile)
 \rightarrow Verfahren bricht ab

Rang

Rang einer Matrix = Anzahl der Nicht-Nullzeilen / Nicht-Nullspalten einer Treppennmatrix oder einer Matrix nach vollständiger Pivotsierung

1. EZU's ändern den Rang nicht

Vollen Rang: $\text{rg}(A) = \min(m, n) \rightarrow$ keine Nullzeile-/Spalte

\rightarrow Matrix mit vollem Rang, Vektoren = l.u.

$\text{rg}(A) < n \rightarrow$ Vektoren = l.a

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$$

Lösbarkeit LGS über Rang:

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) \rightarrow$ LGS lösbar

1. n , $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ genau eine Lösung

2. $< n$, $\det(A) = 0 \rightarrow$ unendlich Lösungen

$\text{rg}(A) < \text{rg}(A|b) \rightarrow$ LGS nicht lösbar

LGS mit unendlichen Lösungen

Freie Variablen: diejenigen Variablen, für die bei einem LGS mit unendlich vielen Lösungen beliebige reelle Zahlen gewählt werden können.

Gebundene Variablen: sind über das LGS an die freien Variablen bzw. an bestimmte reelle Zahlen gebunden.

der gebundenen Variablen = $\text{rg}(A|b)$ = Anzahl der l.u. Gleichungen

freie Variablen sind frei wählbar

freie Variablen = Anzahl Variablen gesamt - Anzahl gebundener Variablen

$$= n - \text{rg}(A|b)$$

Redundante Gleichungen

redundant = als Information nicht notwendig

Gleichungen, welche sich als LK aus anderen Gleichungen darstellen lassen und keine neuen Informationen enthalten

z.B. Nullzeilen

Lineare Optimierung

Vollständiges lineares Programm

- 1) Entscheidungsvariablen (EV): x_1, x_2, \dots
- 2) Zielfunktion (ZF):
 \rightarrow Funktion der EV
 $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow$ max./min
- 3) Nebenbedingungen (NB) / Restriktionen (a.d.):
 $A \cdot x = b$, $A \cdot x \leq b$ bzw. $A \cdot x \geq b$
- 4) Nichtnegativitätsbedingung (NKB):
 \rightarrow keine EV darf einen negativen Wert annehmen
 $x \geq 0$

Standardmaximierungsproblem

- Voraussetzungen:
- \rightarrow ZF max (min umwandeln mit $\cdot (-1)$)
 - NB: $A \cdot x \leq b$ mit $b \geq 0$
 - NKB: $x \geq 0$
- \Rightarrow ggf. NB von \geq in \leq umformen (mit $\cdot (-1)$)

Grafische Lösung

mit zwei Entscheidungsvariablen (EV) x_1 und x_2 möglich

EV bilden das Koordinatensystem

1. NB als Geraden in Koordinatensystem einzeichnen

\rightarrow hierfür alle NB nach x_2 auflösen

2. zulässigen Bereich markieren! aufpassen ob NB \leq oder \geq

3. ZF einzeichnen

\rightarrow hierfür z beliebig wählen (meistens $z = 0$)

4. ZF parallel verschieben, um Optimum herauszufinden

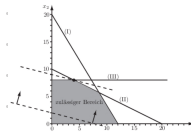
\rightarrow an die Eckpunkte des zulässigen Bereichs

\rightarrow max: so weit wie möglich nach oben

\rightarrow min: so weit wie möglich nach unten

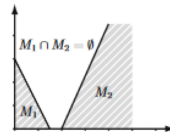
4 Lösungsmöglichkeiten

1. eindeutige Lösung
(genau ein Optimum (Eckpunkt))



2. keine Lösung (NB widersprechen sich)

\rightarrow zulässiger Bereich ist leer



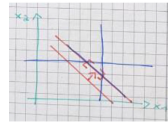
3. unendlich viele Lösungen
(unbegrenzter Zielfunktionswert)

zulässiger Bereich nach oben nicht beschränkt



4. unendlich viele Lösungen (eindeutiger Zielfunktionswert \rightarrow mehr als ein Optimum)

ZF auf dem Rand des zulässigen Bereichs



Simplex-Algorithmus

nur für Standardmaximierungsprobleme \rightarrow evtl. umformen

jede Ecke des zulässigen Bereichs wird nacheinander auf Optimalität geprüft

1. Einführung von Schlupfvariablen um Ungleichungssystem in LGS zu überführen

\rightarrow pro NB eine Schlupfvariable (nimmt die nicht benötigte Kapazität ein, um die auf der rechten Seite stehende Begrenzung zu erreichen)

2. Aufstellen des Anfangstableau

Basis	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	1	0	0	1	0	0	5
s_2	0	1	0	0	1	0	10
s_3	0	0	1	0	0	1	15
ZF	0	0	0	0	0	0	0

\rightarrow negative Elemente in der Zielfunktionszeile zeigen an, dass die aktuelle Lösung durch Erhöhung der Variable verbessert werden kann

3. Anwendung des primalen Simplex-Algorithmus

1. Wahl der Pivotspalte

\rightarrow Spalte mit dem kleinsten (negativsten) Zielfunktionswert

2. Wahl der Pivotzeile

\rightarrow für alle positiven Elemente der Pivotspalte: b geteilt durch Koeffizient in Pivotspalte

\rightarrow kleinster Quotient bestimmt Pivotzeile

3. Neue Basislösung, neues Simplextableau

\rightarrow strenge Pivotisierung der Pivotspalte

\rightarrow die zur Pivotspalte gehörende Variable kommt in die Basis (bei Pivotzeile)

\rightarrow wenn alle Werte in der Zielfunktionszeile positiv sind, ist man fertig

4. Interpretation des Endtableaus

alle Variablen, die nicht in der Basis stehen = 0

Optimum (optimaler Zielfunktionswert)

\rightarrow Sensitivitäten (in Zielfunktionszeile bei s_i):
wird Kapazität j um eine marginale (+) Einheit erhöht (gesenkt), dann steigt (sinkt) der optimale Wert der Zielfunktion approximativ um y Einheiten

Angabe der optimalen Lösung und x und s

\rightarrow wenn s_j in der Basis (also > 0), dann ist die Kapazität nicht ausgelastet (wenn $s_j = 0$, dann ausgelastet)

Sonderfälle

1. Keine eindeutige Wahl des Pivotelements

· in Zielfunktionszeile weisen zwei Elemente den kleinsten Wert auf

\rightarrow Wahl der Pivotspalte beliebig

· zwei Zeilen weisen den kleinsten Quotienten auf

\rightarrow Wahl der Pivotzeile beliebig

2. Unendlich viele Lösungen, unbegrenzter Zielfunktionswert

· Pivotspalte enthält keinen Wert größer als Null

· Durch Pivotspalte ausgewählte Variable kann unendlich erhöht werden, da sich keine der Basisvariablen dadurch verringert

3. Unendlich viele Lösungen, eindeutiger Zielfunktionswert

· mindestens eine Nichtbasisvariable weist einen Koeffizienten von Null in der Zielfunktionszeile auf

· Zielfunktionswert wird durch Erhöhung dieser Variable nicht geändert

· Weitere Lösung erhält man durch weiteren Simplexschritt mit dieser Variable als Pivotspalte

· Neben diesen beiden Ecken sind auch alle Punkte dazwischen optimale Lösungen

Definitionen

Binärvariablen = $x = 1$ oder 0

Integervariablen = Variablen nehmen nur ganzzahlige Werte an