

Formelsammlung Analysis

① Injektivität: jedem Element des Wertbereichs wird höchstens ein Element des DB zugeordnet

Surjektivität: - " - mindestens ein Element - " -

Bijektivität: sowohl injektiv als auch surjektiv

1. Formeln lernen

2. Übungen rechnen

3. Aufgaben der VL

4. Klausur rechnen

5. Def. + Bedingungen aus VL rechnen

② Vektoren

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \vec{x}' = [a \ b \ c]$$

Norm / Länge / Betrag des Vektors

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Einheitsvektor

$$\|\vec{x}\| = 1$$

$$\hookrightarrow \text{z.B. } \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \text{ da } \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1$$

③ Grenzwerte ∇ Am besten mit Taschenrechner berechnen ∇

∇ Punkt der untersucht wird muss nicht im DB liegen ∇

Nichtexistenz von GW / lim

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} = \pm \infty$$

④ Stetigkeit

Bed. (1) Funktion ist definiert an x_0

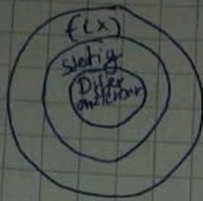
(2) Der Grenzwert an x_0 existiert

(3) Grenzwert an $x_0 = f(x_0)$

(4) Fkt. muss in jedem Punkt stetig sein, damit sie stetig ist)

\hookrightarrow wie bei lim, kann Stetigkeit immer nur an 1 Punkt geprüft werden

⑤ Differenzierbarkeit = "Existenz der Grenzwert der Ableitung"

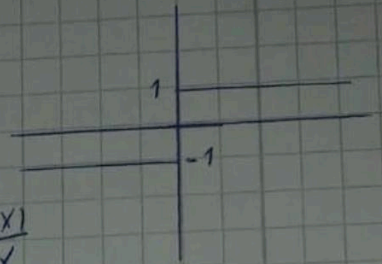


$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

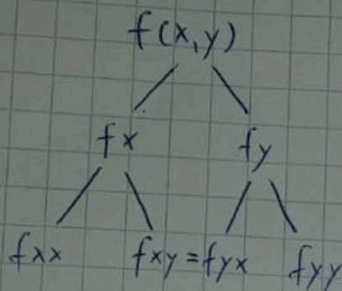
Beispiel:

$$f(x) = |x| \text{ an } x_0 = 0$$

$$\hookrightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$



⑥ Partielle Ableitung



⑦ Tangentialebene

$$z = \underbrace{z_0}_{= f(x_0, y_0)} + \underbrace{f_x}_{= f_x(x_0, y_0)}(x - x_0) + \underbrace{f_y}_{= f_y(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

⑧ Lineare Funktion

Normale Form: $a + bx$

Zwei-Punkt-Form: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Punktsteigungsform: $y - y_1 = b(x - x_1)$

⑨ Totale Ableitung

Bsp: $z = f(x, y) = x^2 + y^3$ $x = t^2$ $y = 2t$

$$\frac{dz}{dt} = f_x \cdot \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot 2t + 3y^2 \cdot 2 = 4xt + 6y^2$$

⑩ Höhenlinie

Steigung der HL: $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$

Analysis

Formelsammlung

⑪ Homogene Funktionen

1. Bsp: $f(x,y) = A \cdot x^\alpha \cdot y^\beta$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= A \cdot (tx)^\alpha \cdot (ty)^\beta \\ &= A \cdot t^\alpha \cdot x^\alpha \cdot t^\beta \cdot y^\beta \\ &= t^{\alpha+\beta} (A \cdot x^\alpha \cdot y^\beta) \\ &\hookrightarrow \text{Grad } \alpha + \beta \end{aligned}$$

2. Bsp: $f(x,y) = x^2 y + xy$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 ty + tx \cdot ty \\ &= t^3 x^2 y + t^2 xy \\ &\quad \swarrow \quad \nwarrow \\ &\quad \text{Nicht homogen} \end{aligned}$$

⑫ Lineare Approximation

1. Variable $f(x) \approx \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{1 \text{ Grad}} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{2 \text{ Grad}} + \underbrace{\frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3}_{3 \text{ Grad}}$

2 Variablen $f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} [f_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2]$

⑬ Differenziale

$f(x)$

$$dy = f'(x) dx$$

$f(x,y)$

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

⑭ Punkte / Mengen

Randpunkte / Innere Punkte

$[1, 5]$ RP: 1 und 5.

IP: alle Elemente im Intervall $1 < x < 5$

$(1, 5)$ RP: 1 und 5.

IP: alle Elemente im Intervall $1 < x < 5$

Unbeschränkt $(-\infty, 5)$

Beschränkt $(5, 8)$

Kompakt: geschlossen + beschränkt

⑪ Stationäre Stellen

↳ sind z.B. Minima, Maxima, Sattelpunkte

$$f'(x) = 0 \quad f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \rightarrow \text{nach } y \text{ umstellen und bei } f_x \text{ einsetzen}$$

⑫ Kritische Punkte

• Es kann sein, dass eine Fkt. an einer Stelle stetig, aber nicht differenzierbar ist.

↳ auch hier kann ein Min/Max vorliegen

↳ kritische Punkte $f(x) = |x| \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{x}{|x|}$$

↳ $x_0 = 0$ nicht definiert

⑬ Führende Hauptminoren

$$A = \begin{bmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{bmatrix} \quad A_1 = |x| \quad A_2 = \begin{vmatrix} x & a \\ a & y \end{vmatrix} \quad A_3 = |A|$$

Definitheit einer symmetrischen Matrix

- positiv, wenn führende Hauptminoren > 0 sind
- und negativ, wenn führende HM gerader Ordnung > 0 und führende HM ungerader Ordnung < 0

⑭ Extrema finden (lokal)

$$f(x, y)$$

(1) $f(x, y)$ partiell ableiten f_x, f_y

$$(2) f_x = 0 \quad f_y = 0$$

(3) Eine Gleichung nach x/y umstellen und in die andere einsetzen

(4) x und y berechnen

(5) Punkte in Hessematrix einsetzen und Definitheit bestimmen

Negativ Definit = Maximum

Positiv Definit = Minimum

①9) Globale Extrema

↳ lokale Extrema und Randpunkte betrachten

②0) Konkavität / Konvexität

↳ f muss zweifach Differenzierbar sein

	Konkav, wenn $f''(x) \leq 0$	} 1 Variable
steng	konkav, wenn $f''(x) < 0$	
	konvex, wenn $f''(x) \geq 0$	
steng	konvex, wenn $f''(x) > 0$	

wenn $H(x)$ negativ \downarrow	steng konkav	} 2 Variablen
wenn $H(x)$ positiv \downarrow	konvex	