

# Finanzmathematik-Formelsammlung (HWS 2019)

Stefan B.

## Abstract

Inoffizielle Formelsammlung, welche reinen Übungszwecken der Teilnehmenden meines Tutoriums dient. Kein Anspruch auf Korrektheit.

Eine Verbreitung, sowohl Nutzung für kommerzielle Zwecke, ist untersagt.

## 1 Einführung

### 1.1 Notation

$r$ := Zinssatz,  $p$ := Zinsfuß,  $q$ := Aufzinsungsfaktor  $= 1+r$ ,  $v$ := Abzinsungsfaktor  $= q^{-1} = \frac{1}{1+r}$ ,  
 $u$ := nominaler Zinssatz,  $\frac{u}{m}$ := unterjähriger Zinssatz

Gesamttag Konvention  $30/360 := (Tag\ T_2 - Tag\ T_1) + 30 * (Monat\ T_2 - Monat\ T_1) + 360 * (Jahre\ T_2 - Jahre\ T_1)$

### 1.2 Zinsrechnung

Exponentielle Verzinsung	$K_t = K_0 * (1 + r)^t$
Lineare Verzinsung	$K_t = K_0 * (1 + r * t)$
Unterjähriger (exponentielle) Verzinsung	$K_t = K_0 * (1 + \frac{u}{m})^{m*t} \Leftrightarrow r_{eff} = (1 + \frac{u}{m})^m - 1$
Kontinuierliche Verzinsung	$K_t = K_0 * e^{u*t} \Leftrightarrow r_{eff} = e^u - 1 \Leftrightarrow u = \ln(1+r)$
Taggenaue Zinsberechnung	$K_t = K_0 * (1 + \frac{x}{360})^t$ ,wobei $x$ = Anzahl Tage (Konvention 30/360)
Gemischte Verzinsung	$K_t = K_0 * (1 + r * \frac{x_1}{360}) * (1 + r)^t * (1 + r * \frac{x_2}{360})$ ,wobei Jahresbruchteile linear und vollständige Jahre geometrisch (Konvention 30/360)

### 1.3 Bewertung von Zahlungsströmen / Kapitalwert

$K_t$  := Wert Zahlungsstrom zum Zeitpunkt  $t$ ,  $K_T$  := Endwert (Wert in  $T$ ),  $K_0$  := Barwert,  
 $z_t$  := Zahlung in  $t$ ,  $z_0$  := Anfangsauszahlung in  $t_0$

Barwert	$K_0 = K_T * q^{-T} = \sum_{t=1}^T z_t * q^{-t}$
Endwert	$K_T = K_0 * q^T = \sum_{t=1}^T z_t * q^{T-t}$
Zeitwert zum Zeitpunkt $t=s$	$K_s = K_0 * q^s = K_T * q^{s-T} = \sum_{t=1}^T z_t * q^{s-t}$
Kapitalwert	$K_0 = -az_0 + \sum_{t=1}^T z_t * q^{-t}$ $\Rightarrow$ Kapitalwertkriterium: $\sum_{t=1}^T z_t * (1+r)^{-t} > az_0$

## 2 Renten- und Tilgungsrechnung

### 2.1 Rentenrechnung

	Barwert	Endwert
Nachschüssige Rente	$R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^T}$	$R * \frac{q^T - 1}{q - 1}$
Vorschüssige Rente	$R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^T} * q$	$R * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q$
Dynamische Rente (NS)	$R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * \frac{1}{q^T}$	$R * \frac{q^T - c^T}{q - c}$
Dynamische Rente (VS)	$R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * \frac{1}{q^T} * q$	$R * \frac{q^T - c^T}{q - c} * q$
Unterjährige Rente (NS)	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1} * \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}}$	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1}$
Unterjährige Rente (VS)	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1} * \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}} * q^{\frac{1}{m}}$	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1} * q^{\frac{1}{m}}$
Unterjährige dyn. Rente (NS)	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}} * \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}}$	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}}$
Unterjährige dyn. Rente (VS)	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}} * \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}} * q^{\frac{1}{m}}$	$R * \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}} * q^{\frac{1}{m}}$
	<b>Nachschüssig</b>	<b>Vorschüssig</b>
Ewige Rente	$\frac{R}{r}$	$R + \frac{R}{r} = \frac{R}{r} * q$
Ewige Rente (/Wachstum)	$\frac{R}{r - g}$	$R + \frac{R * c}{r - g}$

### 2.2 Tilgungsrechnung

	Nachschüssig	Vorschüssig
Kreditbetrag $S_0$	$S_0 = A * \frac{q^T - 1}{q - 1} * \frac{1}{q^T}$	$S_0 = A * \frac{q^T - 1}{q - 1} * \frac{q}{q^T}$
Annuität $A_t = Z_t + T_t$	$A = S_0 * \frac{q - 1}{q^T - 1} * q^T$	$A = S_0 * \frac{q - 1}{q^T - 1} * q^T * q^{-1}$
Restschuld am Ende Periode t <i>Allgemein</i> : $RS_t = \frac{q^T - q^t}{q^T - 1}$	$RS_t = S_0 * q^t - A * \frac{q^t - 1}{q - 1}$	$RS_t = S_0 * q^t - A * \frac{q^t - 1}{q - 1} * q$
Kreditlaufzeit T	$T = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 * r)}{\ln(q)}$	$T = \frac{\ln(A * q) - \ln(A * q - S_0 * r)}{\ln(q)}$
Zinszahlung $Z_t$	$Z_t = r * RS_{t-1} = A - T_t = S_0 * \frac{(q^T - q^{t-1}) * (q - 1)}{q^T - 1}$	
Tilgungszahlungen $T_t$	$T_t = A - Z_t = S_0 * \frac{q^{t-1} * (q - 1)}{q^T - 1}$	

### 3 Kurs- und Renditerechnung

#### 3.1 Kursrechnung

<b>Ziel:</b> Bestimmung des fairen Preises/Kurses eines Finanztitels
$P_0$ := fairer Preis Bond in $t_0$ , $N$ := Nennwert, $D_t$ := Dividende in Periode $t$ , $g$ := konstanter Wachstumsfaktor der Dividenden, $T$ := Restlaufzeit Bond, $r$ := Marktzinssatz, $i$ := Nominalzinssatz, $v_0$ := fairer Preis Aktie

Fairer Preis $P_0$ (allgemein)	$P_0(r) = \sum_{t=1}^T z_t * \frac{1}{(1+r)^t} = z_t * q^{-t}$
Standardbond $\Rightarrow Z = N * i$ (Zinszahlungen)	$P_0(r) = \frac{Z}{r} + (N - \frac{Z}{r}) * q^{-T}$ $= Z * \frac{q^T - 1}{q - 1} * q^{-T} + N * q^{-T}$ $= N * [\frac{i}{r} + (1 - \frac{i}{r}) * q^{-T}]$
Zerobond	$b(0, t) = N * q^{-T}$
Aktie (ex: unmittelbar nach Dividende) Aktie (cum: unmittelbar vor Dividende)	$v_0 = \frac{D_1}{r-g}$ $v_0 = D_0 + \frac{D_1}{r-g}$

#### 3.2 Renditerechnung

<b>Einperiodiges Investment</b>	
zeitdiskret	$r = \frac{v_1 - v_0}{v_0}$
zeitstetig	$u = \ln(1 + r) = \ln(\frac{v_1}{v_0})$
Cum-Dividenden-Rendite	$r = \frac{K_1 + D - K_0}{K_0}$
<b>Endfälliges Investment</b>	
Gesamtrendite	$r(0, T) = \frac{v_T - v_0}{v_0}$
geometrisch annualisierte Rendite $r_G$	$r_G = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T (1 + r_t)} - 1$
arithmetisch annualisierte Rendite $r_A$	$r_A = \frac{1}{T} * \sum_{t=1}^T r_t$

<b>Mehrperiodiges Investment</b>	
Durchschnittliche Rendite	$r_D = \frac{1}{T} * \frac{\sum_{t=1}^T z_t - az_0}{az_0}$
Interner Zinsfuß	$K_0(r) = -az_0 + \sum_{t=1}^T z_t * (1+r)^{T-t} = 0$ Für $T = 2$ : $-az_0x^2 + z_1x + z_2$ $\Rightarrow$ Nullstellen berechnen
Spot Rates (interne Rendite Einheitszerobonds)	$r_I(t) = \sqrt[t]{\frac{1}{b(0,t)}} - 1$
Interne Rendite ohne Rückflüsse	$r_I = \sqrt[T]{\frac{v_T}{v_0}} - 1$
Modifizierte interne Rendite (Baldwin-Verzinsung)	$az_0 * (1+r_B)^T = \sum_{t=1}^T z_t * q^{T-t}$ $\Leftrightarrow r_B =$ $(1+r_0) * \sqrt[T]{\frac{1}{az_0} * \sum_{t=1}^T z_t * (1+r_0)^{-t}} - 1$
<b>Rendite von Fondsinvestments</b>	
<i>Zeitgewichtete Rendite (Perspektive Fondmanager)</i>	
zeitgewichtete Gesamtrendite	$r_{ZGR} = [\prod_{t=1}^T (1+r_t)] - 1$ $= [\prod_{t=1}^T \frac{v_t}{v_{t-1}+z_{t-1}}] - 1$
zeitgewichtete Rendite (annualisierte Form)	$r_{ZGR} = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T (1+r_t)} - 1$ $= \sqrt[T]{\prod_{t=1}^T \frac{v_t}{v_{t-1}+z_{t-1}}} - 1$
<i>Kapitalgewichtete Rendite (Perspektive Investor)</i>	
kapitalgewichtete Rendite	$v_0 * (1+r)^T + \sum_{t=1}^{T-1} (z_t * (1+r)^{T-t}) = v_T$