Lösungen zur Klausur vom 11.06.10, Version A

A1: B: Jede der 4 Gruppen setzt sich aus einer Mannschaft aus den vier stärksten Mannschaften und 3 Mannschaften der restlichen 12 (=16-4) zusammen.

$$4 \cdot \binom{12}{3} \cdot 3 \cdot \binom{9}{3} \cdot 2 \cdot \binom{6}{3} \cdot 1 \cdot \binom{3}{3} = 4! \cdot 12!/(3!)^4 = 8\,870\,400 \in (8 \cdot 10^6, 16 \cdot 10^6].$$

A2: A: Die günstigen Kartenkonstellationen setzen sich aus dem Pik Buben und 7(=8 − 1) Nicht-Pik-Buben-Karten zusammen.

$$1 \cdot \binom{31}{7} / \binom{32}{8} = 0.25 \in (0, 0.26].$$

A3: C: B=„Spieler erhält mindestens einen Buben", A=„Spieler erhält mindestens ein Ass".

$$P(A) = P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.7945,$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.930$$

Daher ist

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \approx 0.4789 \in (0.45, 0.49].$$

A4: B: $P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(B) = 0.7 - 0.4 = 0.3 \in (0.25, 0.3]$.

A5: A: $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.2 = 0.5 \cdot 0.4 = P(A)P(B)$.

A6: B: Die Aussage ist richtig, wenn A und B unabhängig sind. I.A. ist sie nicht richtig.

A7: A: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ umstellen.

A8: C: D_i = „Teil i fällt aus", i=1,2. A_1=„Teil 2 wurde in Werk W_A produziert", A_2=„Teil 2 wurde in Werk W_B produziert". $P(D_1) = 0.02$. $P(A_1) = 0.6$, $P(A_2) = 0.4$, $P(D_2|A_1) = 0.02$, $P(D_2|A_2) = 0.035$

$$P(D_2) = P(D_2|A_1)P(A_1) + P(D_2|A_2)P(A_2) = 0.026 \in (0.025, 0.03].$$

A9: C: C=„Erzeugnis E fällt aus"$=D_1 \cup D_2$. D_1, D_2 unabhängig.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0.02 + 0.026 - 0.02 \cdot 0.026 \\ &= 0.04548 \in (0.044, 0.046). \end{aligned}$$

A10: B: $P(X \leq 1.5) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6 \in (0.5, 0.6]$.

A11: C: $\mathcal{T}_X = \{x : P(X = x) > 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 3\}$.

A12: B: Transformationsregel.

$$(-2+1)^2 \cdot 0.1 + (-1+1)^2 \cdot 0.2 + (0+1)^2 \cdot 0.3 + (2+1)^2 \cdot 0.1 + (3+1)^2 \cdot 0.3 = 6.1 \in (6, 7].$$

A13: C: $P(X < 0) = 0.3$ und $P(X \leq 0) = 0.6$. Das Quantilsniveau 0.35 wird an der Stelle 0 das erste Mal übersprungen. $q_{0.35} = 0 \in (-1, 0]$

A14: A:

$$F(1.5) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{1.5} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x\Big|_1^{1.5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0.5 = 0.5 \in (0, 0.55).$$

A15: B:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{6}x^2\Big|_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot 8 \approx 1.583 \in (1.5, 1.6].$$

A16: B: Für $x \leq 1$ ist $F(x) \leq 1/3$, s.o. Für $x \in (1, 3)$ gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x - 1).$$

x ist 0.8-Quantil, wenn $F(x) = 0.8$ gilt!

$$F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x - 1) = 0.8 \implies x = 2.4 \in (2.2, 2.4].$$

A17: D: Die Darstellung entspricht der einer Wahrscheinlichkeitsfunktion, aber die Summe der Balkenhöhen ist größer als 1.

A18: A.

A19: A.

A20: C: $X \sim Po(1.5) =$ Anzahl der geschossenen Tore in einem Fußballspiel.

$$P(X = 1) = e^{-1.5} \frac{1.5}{1!} \approx 0.335 \in (0.3, 0.35].$$

A21: B:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 1) = 1 - e^{-1.5}(1 + \frac{1.5}{1!} + \frac{1.5^2}{2!}) \\ &\approx 0.191 \in (0.18, 0.21]. \end{aligned}$$

A22: D: Y=Anzahl der Spiele mit mindestens einem Tor, wenn 3 Spiele ausgetragen werden. $Y \sim B(3, \pi)$ mit $\pi = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1.5} \approx 0.7769$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) \approx \binom{3}{2} 0.7769^2 \cdot (1 - 0.7769) + \binom{3}{3} 0.7769^3 \\ &\approx 0.8729 \in (0.85, 1] \end{aligned}$$

A23: B:

$$\begin{aligned} P(2490 < X < 2520) &= \Phi(\frac{2520 - 2500}{15}) - \Phi(\frac{2480 - 2500}{15}) \approx \Phi(1.33) - \Phi(-0.67) \\ &\approx 0.9082 - (1 - 0.7486) = 0.6568 \in (0.64, 0.67]. \end{aligned}$$

A24: D: Temperatur in Fahrenheit umrechnen: $1380 = (T_F - 32) \cdot 5/9 \implies T_F = 2516$.

$$P(X < 2516) = \Phi(\frac{2516 - 2500}{15}) \approx \Phi(1.07) \approx 0.8577 \in [0.81, 1].$$

A25: A: $c = 1 - 0.1 - 0.1 - 0.2 - 0.4 - 0.2 = 0$.

A26: C: $P(Y \leq 1) = 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.4 = 0.8 \in (0.7, 0.8]$.

A27: B: $P(Y = 1) = 0.1 + 0.4 = 0.5$ („Spaltensumme“), also

x	1	2
P(X=x|Y=1)	0.1/0.5=0.2	0.4/0.5=0.8

$\implies E(X|Y = 1) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8 = 1.8 \in (1.7, 1.8]$.

A28: C: Es gilt

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{5}I_{[0,1]}(x)\int_0^2 (1 + x + y)dy = \frac{1}{5}I_{[0,1]}(x)(y + xy + \frac{1}{2}y^2)|_0^2 \\ &= \frac{1}{5}I_{[0,1]}(x)(4 + 2x). \end{aligned}$$

Anmerkung: Da Dichten nur bis auf einzelne Stellen eindeutig bestimmt sind, spielt die Abweichung an den Stellen 0 und 1 keine Rolle.

A29: D: Es gilt

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x,y)dydx = \frac{1}{5}\int_0^1\int_0^2 (xy + x^2y + xy^2)dydx \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 (x\frac{1}{2}y^2 + x^2\frac{1}{2}y^2 + x\frac{1}{3}y^3)|_{y=0}^{y=2}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 (2x + 2x^2 + \frac{8}{3}x)dx \\ &= \frac{1}{5}(x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2)|_0^1 = \frac{1}{5}(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}) = 0.6 \in (0.58, \infty). \end{aligned}$$

A30: C: $E(X) = 0.4E(U) + 0.6E(V) = 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 1 = 0.8 \in [0.8, 0.9)$.

A31: B: $Var(U) = 0.25$, da $U \sim B(1, 0.5)$,

$$\begin{aligned} Var(X) &= 0.4^2 \cdot Var(U) + 0.6^2 Var(V) = 0.4^2 \cdot 0.25 + 0.6^2 \cdot 1 = 0.4, \\ Cov(X, U) &= 0.4 \cdot Cov(U, U) + 0.6 \cdot Cov(V, U) = 0.4 Var(U) = 0.1, \end{aligned}$$

$\varrho(X, U) = 0.1/\sqrt{0.25 \cdot 0.4} \approx 0.3162 \in (0.31, 0.34]$.

A32: A: X$\sim B(40, 0.5)=$ Anzahl der geworfenen „Zahl“.

$$P(X = 20) = \binom{40}{20} \cdot 0.5^{20} \cdot (1 - 0.5)^{20} \approx 0.1254 \in [0, 0.135].$$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned} P(X = 20) &\approx \Phi(\frac{20.5 - 40 \cdot 0.5}{\sqrt{40 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) - \Phi(\frac{19.5 - 40 \cdot 0.5}{\sqrt{40 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) \approx \Phi(0.16) - \Phi(-0.16) \\ &\approx 0.5636 - (1 - 0.5636) = 0.1272 \in [0, 0.135]. \end{aligned}$$

A33: C: n=40,

$$
\begin{aligned}
P(0.4 \le X/n \le 0.57) &= P(16 \le X \le 22.8) = P(16 \le X \le 22) \\
&\approx \Phi(\frac{22.5 - 40 \cdot 0.5}{\sqrt{40 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) - \Phi(\frac{15.5 - 40 \cdot 0.5}{\sqrt{40 \cdot 0.5 \cdot 0.5}}) \approx \Phi(0.79) - \Phi(-1.42) \\
&\approx 0.7852 - (1 - 0.9222) = 0.7074 \in (0.69, 0.72].
\end{aligned}
$$

A34: C: $E(X_i) = \mu = 1/\lambda = \theta$. $E(S) = (E(X_1) + E(X_2))/2 = \mu = \theta$. Damit ist S erwartungstreu und asymptotisch erwartungstreu für θ. Da S nur von 2 X_i abhängt, ist S nicht konsistent. Es sind 2 der drei Eigenschaften erfüllt.

A35: D: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x) dx = \int_{-1}^{0} x \cdot \frac{3}{4} dx + \int_{\theta}^{\theta+1} x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} x^2 |_{-1}^{0} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} x^2 |_{\theta}^{\theta+1} \\
&= -\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \underbrace{((\theta+1)^2 - \theta^2)}_{\theta^2 + 2\theta + 1 - \theta^2 = 2\theta + 1} = \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{4} \implies \theta = 4\mu + 1.
\end{aligned}
$$

Der Momentenschätzer ist dann $\hat{\Theta} = 4\bar{X}_n + 1$.

A36: B: $\mu = E(X_i) = (0+2)/2 = 1$. Nach dem Gesetz der Großen Zahl konzentriert sich die Verteilung von $\bar{X}_n$ in einer Umgebung von $\mu = 1$; insbesondere $P(\bar{X}_n \in [0.7, 1.2]) \to 1$, da μ im Inneren des Intervalls $[0.7, 1.2]$ liegt.

A37: C: $s^2 = (156.436 - 13 \cdot 3.448^2)/12 \approx 0.1569 \in (0.15, 0.16]$.

A38: B: KI für μ („mittlere Durchfahrtszeit“) bei unbekannter Varianz. $n = 13$, $\alpha = 0.02$.

$$
KI : \bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s^2}{n} = 3.448 \pm 2.6810 \cdot \sqrt{\frac{0.1569}{13}} \approx 3.448 \pm 0.295
$$

Das 0.98-KI$\approx [3.153, 3.743]$ enthält das Intervall $(3.2, 3.7)$.

A39: C: Modell: $X \sim B(1000, \pi)$, $\pi=$ Anteil der Haushalte mit Interesse. $x = 42$, $\hat{\pi} = 42/1000 = 0.042$, $1 - \hat{\pi} = 0.958$. $\alpha = 0.05$.

$$
\hat{\pi} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\hat{\pi} \cdot (1 - \hat{\pi})/n} = 0.042 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.042 \cdot 0.958}{1000}} \approx 0.042 \pm 0.0124.
$$

Das 0.95-KI$\approx [0.0296, 0.0544]$ enthält 0.031 und 0.054.

A40: C: Für $L_{KI} = 0.01$ ist die gewünschte Genauigkeit $\Delta = L_{KI}/2 = 0.005$. Mit den Vorinformationen bestimmen wir die Mindeststichprobenumfang über

$$
\hat{\pi}_*(1 - \hat{\pi}_*)(z_{1-\alpha/2}/\Delta)^2 = 0.042 \cdot 0.958(1.96/0.005)^2 \approx 6182.82 \in (6000, 18000].
$$

A41: A: Approximativer Binomialtest: $\alpha = 0.05$, $H_1 : \pi > 0.03 = \pi_0$.

$$
t = \frac{x - n\pi_0}{\sqrt{n \cdot \pi_0(1 - \pi_0)}} = \frac{42 - 1000 \cdot 0.03}{\sqrt{1000 \cdot 0.03 \cdot 0.97}} = \frac{12}{\sqrt{29.1}} \approx 2.225 \in (0, 2.3].
$$

A42: C: Modell: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$= Anzahl der im Mittel pro Stunde produzierten Transformatorkerne beim i-ten Produktionsdurchlauf. σ^2 ist bekannt, also Gauß-Test. $H_1 : \mu < \mu_0 = 15.5$ (mit Signifikanz) zu zeigen, also $H_0 : \mu \geq \mu_0 = 15.5$.

A43: B:

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} = \sqrt{17} \cdot \frac{15.42 - 15.5}{0.16} \approx -2.062 \in (-2.2, -2].$$

A44: A: p-Wert=$\Phi(t) \approx \Phi(-2.06) = 1 - \Phi(2.06) \approx 1 - 0.9803 = 0.0197 \in [0, 0.02]$.

A45: A: Unter der Nullhypothese ist die Wahrscheinlichkeit eine Fehlentscheidung zu treffen $\leq \alpha$, also die Wahrscheinlichkeit, die richtig Entscheidung zu treffen $\geq 1 - \alpha$.

A46: A: t-Test. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$=Temperatur der i-ten Messung. $n = 10$, $\mu_0 = 1400$, $\bar{x} = 1403.74$, $s^2 = 159.69$, $\alpha = 0.05$.

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} = \sqrt{10}\frac{1403.74 - 1400}{\sqrt{159.69}} \approx 0.936 \in (-\infty, 1.0].$$

A47: D: $H_0 : \mu = \mu_0$ geg. $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Kritische Werte $\pm t_{n-1,1-\alpha/2} = \pm t_{9,0.975} \approx \pm 2.2622$. $2.2622 \in (2.25, \infty)$.

A48: B: Da $|t| \not> 2.2622$, H_0 nicht ablehnen.

A49: B: Vergleich der Erwartungswerte von zwei normalverteilten Grundgesamtheiten mit gleicher Varianz: 2-Stichproben-t-Test. Zu zeigen $\mu_Y - \mu_X > 10$, also $H_1 : \delta = \mu_X - \mu_Y < -10 = \delta_0$. Zunächst ist

$$s_p^2 = ((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2)/(n+m-2) = (26 \cdot 23.52 + 57 \cdot 29.91)/83 \approx 27.908.$$

Damit ist

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{\sqrt{s_p^2(1/n + 1/m)}} \approx \frac{170.85 - 183.24 + 10}{\sqrt{1.5148}} \approx -1.942 \in (-2.0, -1.9].$$

A50: D: $\alpha = 0.05$. Kritischer Wert $-t_{n+m-2,1-\alpha} = -t_{83,0.95} \approx -z_{0.95} \approx -1.64 \in (-1.8, \infty)$.

A51: C: Daten werden für gleiche Mitarbeiter erhoben. Zweistichprobenproblem für verbundene Stichproben.

i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = x_i - y_i$	5	3	9	7	2	-2	-1

Es gilt, $n = 7$,

$$\bar{z} = 3.286, \quad \sum_i z_i^2 = 173, \quad s_Z^2 \approx 16.236.$$

Eine Verringerung der Beschwerden im Mittel liegt vor, wenn $\mu_Y < \mu_X$ ist, also ist $H_1 : \delta = \mu_X - \mu_Y > 0 = \delta_0$ zu prüfen. Daher ist

$$t = \sqrt{n}\frac{\bar{z} - 0}{\sqrt{s_Z^2}} \approx \sqrt{7}\frac{3.286}{\sqrt{16.236}} \approx 2.158.$$

Der Betrag von t liegt in $(1.9, 2.2]$.

A52: C: $\alpha = 0.05$. Betrag des kritischen Werts für einseitige Test: $t_{n-1,1-\alpha} = t_{6,0.95} \approx 1.9432 \in (1.9, 2.1]$.

A53: B: Zweistichprobenbinomial-Test. $\hat{\pi}_1 = 42/1000 = 0.042$, $\hat{p}_2 = 24/1000 = 0.024$. $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ bzw. $\delta = \pi_1 - \pi_2 = 0 = \delta_0$ gegen $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$.

$$t = \frac{\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}_1 \cdot (1-\hat{p}_1)/n - \hat{\pi}_2 \cdot (1-\hat{p}_2)/m}} = \frac{0.042 - 0.024}{\sqrt{\frac{0.042 \cdot 0.958}{1000} + \frac{0.024 \cdot 0.976}{1000}}}$$
$$\approx \frac{0.018}{0.00798} \approx 2.256 \in (2.1, 2.3].$$

A54: B: Kritischer Wert für zweiseitiges Testproblem, $\alpha = 0.05$: $z_{0.975} \approx 1.96$. $|t| > 1.96$, also H_0 ablehnen.

A55: C: n=10,

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1}(\sum_i x_i y_i - n \cdot \bar{x}\bar{y}) = \frac{1}{9}(57112 - 10 \cdot 38.3 \cdot 141.7) \approx 315.667 \in (310, 320].$$

A56: D: $r_{XY} = s_{XY}/\sqrt{s_X^2 s_Y^2} \approx 315.667/\sqrt{198.2 \cdot 872.1} \approx 0.759$.

$$t = \sqrt{n-2}\frac{r_{XY}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}} \approx \sqrt{8} \cdot \frac{0.759}{0.65} \approx 3.302 \in (3.1, \infty).$$

A57: B: Kritischer Wert für $H_1 : \varrho_{X,Y} > 0$, $\alpha = 0.01$: $t_{n-2,1-\alpha} = t_{8,0.99} \approx 2.8965 \in (2.4, 2.9]$.

A58: C: $n = 5$,

$$\bar{x} = 792.04, \quad \bar{y} = 302.52, \quad s_{XY} = \frac{1}{4}(2617533 - 5 \cdot 792.04 \cdot 302.52) = 354\,873.32.$$

Damit ist

$$\hat{\beta} = \frac{s_{XY}}{s_X^2} \approx \frac{354\,873.32}{952\,342.1} \approx 0.373 \in (0.35, 0.39].$$

A59: D: Mit

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} \approx 303.52 - 0.373 \cdot 792.04 \approx 7.089$$

ergibt sich die Prognose für $x = 1600$ als

$$\hat{y}(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot x \approx 7.089 + -0.373 \cdot 1600 \approx 603.89 \in (600, \infty).$$

A60: B. $\hat{\beta}$ ist nur ein Schätzer für β und liefert nur Näherungswerte für das richtige β.