Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

# Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

**FSS 2012, 1. Termin, 11. Juni 2012**
**Version: A**

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

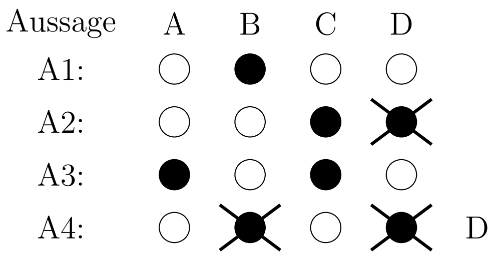
Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen




Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 32 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe**

Ein Investor möchte in 5 verschiedene Aktien einer Branche investieren. Er hat schon eine Vorauswahl von 12 Aktien vorgenommen. Sein Kapital möchte er dabei gemäß der Aufteilung 25%, 20%, 20%, 20%, 15% investieren.
Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, das Geld zu investieren, liegt in

**A1:** (A) $[0, 12\,000]$. (B) $(12\,000, 24\,000]$. (C) $(24\,000, 48\,000]$. (D) $(48\,000, \infty)$.

**Aufgabe**

Für die Beziehung zwischen zwei Ereignissen lässt sich folgendes formulieren: Wenn Ereignis A eintritt, dann tritt auch Ereignis B ein. Welche der folgenden Beziehungen gilt dann stets:

**A2:** (A) $A \cap \bar{B} = \emptyset$. (B) $\bar{A} \cap B = \emptyset$. (C) $A \cap B = \emptyset$. (D) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

**Aufgabe**

Eine Buchhandlung hat 10 verschiedene Kochbücher vorrätig, von denen 4 nur vegetarische Rezepte enthalten. Egon wählt 2 verschiedene Kochbücher zufällig aus.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens ein Kochbuch mit nur vegetarischen Rezepten auswählt, liegt in

**A3:** (A) $[0, 0.60]$. (B) $(0.60, 0.70]$. (C) $(0.70, 0.80]$. (D) $(0.80, 1]$.

**Aufgabe**

Für die Ereignisse A und B sei folgendes bekannt: $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$. Dann ist $P(A|B)$ in

**A4:** (A) $[0, 0.1]$. (B) $(0.1, 0.2]$. (C) $(0.2, 0.3]$. (D) $(0.3, 1]$.

**Aufgabe**

$A$ und $B$ seien Ereignisse mit $0 < P(A), P(B) < 1$ zu einem Ergebnisraum $\Omega$.
(a) A und B seien unabhängig. Dann ist die Aussage $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**A5:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) A und B bilden eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$. Dann gilt stets

**A6:** (A) $A \cap B = \emptyset$. (B) $A \cap B = A$. (C) $A \cap B = B$. (D) $A \cap B = \Omega$.

**Aufgabe**

Zur Feststellung einer Krankheit $K$ werde ein Test $A$ durchgeführt. Wenn ein Patient krank ist, dann liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ein positives Ergebnis. Wenn der Patient gesund ist, zeigt der Test immer noch mit Wahrscheinlichkeit 0.02 ein positives Resultat. Es wird davon ausgegangen, dass 1% der untersuchten Personen tatsächlich an der Krankheit $K$ leiden. Für eine zufällig ausgewählte Person liegt die Wahrscheinlichkeit
(a) für ein positives Ergebnis des Tests in

**A7:** (A) $[0, 0.032]$. (B) $(0.032, 0.0.035]$. (C) $(0.035, 0.038]$. (D) $(0.038, 1]$.

(b) nicht krank zu sein, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt, in

**A8:** (A) $[0, 0.63]$. (B) $(0.63, 0.66]$. (C) $(0.66, 0.69]$. (D) $(0.69, 1]$.

**Aufgabe**
In der Gruppenphase eines Fußballturniers muss eine Mannschaft gegen drei andere Mannschaften antreten, wobei aus historischer Erfahrung davon ausgegangen wird, dass sie die Mannschaften mit Wahrscheinlichkeit 0.8, 0.7 bzw. 0.6 unabhängig von einander besiegen kann.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft, mindestens zwei der drei Spiele gewinnt, liegt in

**A9:** (A) $[0, 0.80]$. (B) $(0.80, 0.84]$. (C) $(0.84, 0.88]$. (D) $(0.88, 1]$.

**Aufgabe**
F sei die Verteilungsfunktion und f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable.
(a) f ist stetig. Die Aussage ist

**A10:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) Es gilt $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle reellen x. Die Aussage ist

**A11:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

**Aufgabe**
Es werde wiederholt ein idealer Würfel geworfen. X gebe an, wie viele Würfe notwendig waren, bis das erste Mal eine Sechs geworfen wurde. Für die Wurfergebnisse 3,1,6,2,... wäre z.B. X=3.
(a) Der Träger von $X$ ist

**A12:** (A) $\{1, 2, \ldots, 6\}$. (B) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (C) $[1, \infty)$. (D) $\mathbb{R}$.

(b) $P(X = 3)$ liegt in

**A13:** (A) $[0, 0.13]$. (B) $(0.13, 0.16]$. (C) $(0.16, 0.19]$. (D) $(0.19, 1]$.

**Aufgabe**
Die Zufallsvariable X sei diskret verteilt gemäß Wahrscheinlichkeitstabelle

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

(a) $P(0 < X \leq 1)$ liegt in

**A14:** (A) $[0, 0.3]$. (B) $(0.3, 0.4]$. (C) $(0.4, 0.7]$. (D) $(0.7, 1]$.

(b) Die Varianz von X ist in

**A15:** (A) $[0, 0.75]$. (B) $(0.75, 0.85]$. (C) $(0.85, 0.95]$. (D) $(0.95, \infty)$.

**Aufgabe**
Die diskrete Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 0.3I_{[-1,0)}(x) + 0.8I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

Der Erwartungswert von X liegt in

**A16:** (A) $(-\infty, -0.15]$. (B) $(-0.15, -0.05]$. (C) $(-0.05, 0.05]$. (D) $(0.05, \infty)$.

**Aufgabe**
$X$ sei stetig verteilt mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\,x^2\,I_{(0,1]}(x) + \frac{5}{6}\,I_{(1,2)}(x).$$

(a) F(1.5) liegt in

**A17:** (A) [0,0.55). (B) [0.55,0.60]. (C) (0.60,0.65). (D) [0.65,1].

(b) $E(X)$ ist in

**A18:** (A) (-$\infty$,1.10]. (B) (1.10,1.20]. (C) (1.20,1.30]. (D) (1.30,$\infty$).

(c) Das 0.7-Quantil zu X liegt im Intervall

**A19:** (A) (-$\infty$,1.68]. (B) (1.68,1.76]. (C) (1.76,1.84]. (D) (1.84,$\infty$).

**Aufgabe**
Der monatliche Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts wird als Zufallsvariable aufgefasst und betrage im Mittel 100 (alle Angaben in kWh) bei einer Standardabweichung 15. Der Energieverbrauch der verschiedenen Monate eines Jahres mögen sich nicht beeinflussen.
(a) Der Erwartungswert des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A20:** (A) $(-\infty, 950]$ (B) $(950, 1100]$. (C) $(1100, 1250]$. (D) $(1250, \infty)$.

(b) Die Varianz des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A21:** (A) $[0, 1900]$. (B) $(1900, 2200]$. (C) $(2200, 2500]$. (D) $(2500, \infty)$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.
Welche der Aussagen ist *falsch*!

**A22:** (A) $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n \cdot \mu$. (B) $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$. (C) $Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \sigma^2$.

**Aufgabe**
Bei der Lotterie „6 aus 36“ kreuzt man auf dem Tippschein 6 aus 36 möglichen Zahlen an. Bei der Ziehung der Lotterie werden dann 6 aus den 36 Zahlen ohne Zurücklegen gezogen. Wir gehen davon aus, dass 700 000 Tippscheine zufällig und unabhängig voneinander ausgefüllt werden. Die Anzahl der Tippscheine, auf denen alle Zahlen richtig angekreuzt wurden, ist dann approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$ in

**A23:** (A) $(0, 0.28]$. (B) $(0.28, 0.31]$. (C) $(0.31, 0.34]$. (D) $(0.34, \infty)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf mindestens zwei Tippscheinen alle Zahlen richtig getippt wurden, liegt in

**A24:** (A) $(0, 0.035]$. (B) $(0.035, 0.040]$. (C) $(0.040, 0.045]$. (D) $(0.045, 1]$.

**Aufgabe**
Beim Ausspielen eines Würfels trete die Augenzahl ,1' mit Wahrscheinlichkeit 0.1 auf.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 5-maligen Ausspielen des Würfels genau 3 Mal die Augenzahl ,1' auftritt, liegt in

**A25:** (A) $[0, 0.0075]$. (B) $(0.0075, 0.0095]$. (C) $(0.0095, 0.0115]$. (D) $(0.0115, 1]$.

**Aufgabe**
X sei standardnormalverteilt. Es gelte $P(a \leq 2X + 1 \leq 5) = 0.1$.
$a$ liegt in

**A26:** (A) $(-\infty, 3.4]$. (B) $(3.4, 3.7]$. (C) $(3.7, 4.0]$. (D) $(4.0, \infty)$.

**Aufgabe**
Der Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts sei normalverteilt mit Erwartungswert 1500 (alle Angaben in kWh) und Standardabweichung 300. Für eine kWh sind beim Stromanbieter 24 Cent zu bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass für den Stromverbrauch mehr als 400 Euro zu bezahlen sind, liegt in

**A27:** (A) $[0, 0.27]$. (B) $(0.27, 0.30]$. (C) $(0.30, 0.33]$. (D) $(0.33, 1]$.

**Aufgabe**
Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsvariable X und Y sei

| $x_i \setminus y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.2 | 0 |
| 1 | 0.1 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.2 |

(a) $P(|X - Y| \leq 1)$ liegt in

**A28:** (A) $[0, 0.65]$. (B) $(0.65, 0.75]$. (C) $(0.75, 0.85]$. (D) $(0.85, 1]$.

(b) Cov(X,Y) ist in

**A29:** (A) $(-\infty, 0.0]$. (B) $(0.0, 0.10]$. (C) $(0.10, 0.20]$. (D) $(0.20, \infty)$.

(c) $E(Y|X = 1)$ ist in

**A30:** (A) $(-\infty, 0.75]$. (B) $(0.75, 0.85]$. (C) $(0.85, 0.95]$. (D) $(0.95, \infty)$.

**Aufgabe**
Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X, Y)$ sei stetig verteilt mit Dichtefunktion

$$f(x, y) = c \cdot x \cdot (1 + y^2) I_{[1,3]}(x) I_{[-1,1]}(y).$$

$c$ liegt im Intervall

**A31:** (A) $[0, 0.085]$. (B) $(0.085, 0.105]$. (C) $(0.105, 0.125]$. (D) $(0.125, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Renditen X und Y zweier Aktien, $A_X$ und $A_Y$, seien normalverteilt (alle Angaben in Prozent): $X \sim N(5, 9)$ und $Y \sim N(3, 4)$. Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y betrage 0.7. Ein Investor möchte 30% seines Geldes in Aktie $A_X$ und den Rest in $A_Y$ investieren.
(a) Die erwartete Rendite des Investment liegt in

**A32:** (A) $(-\infty, 3.7]$. (B) $(3.7, 3.9]$. (C) $(3.9, 4.1]$. (D) $(4.1, \infty)$.

(b) Die Standardabweichung des Investments liegt in

**A33:** (A) $[0, 1.60]$. (B) $(1.60, 1.80]$. (C) $(1.80, 2.00]$. (D) $(2.00, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 60 maligen Werfen eines Würfels mindestens 24 Mal eine ‚6' geworfen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit eine ‚6' zu werfen 0.4 beträgt, liegt in

**A34:** (A) $[0, 0.565]$. (B) $(0.565, 0.585]$. (C) $(0.585, 0.605]$. (D) $(0.605, 1]$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit unbekannten Erwartungswert $E(X) = \mu$ und unbekannter Varianz Var(X)=$\sigma^2 > 0$.
(a) Welcher der folgenden erwartungstreuen Schätzer für $\mu$ hat die kleinste Varianz?

**A35:** (A) $0.4X_1 + 0.6X_3$. (B) $X_3$. (C) $0.5X_1 + 0.5X_2$. (D) $0.2X_1 + 0.1X_2 + 0.7X_3$.

(b) Ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2$ ist

**A36:** (A) $X_1^2 - X_2^2$. (B) $X_1^2 - \mu^2$. (C) $X_1^2 - X_2X_3$. (D) (A)-(C) sind falsch.

(c) Es seien

$$T_n = (\bar{X}_n)^2, \qquad U_n = \frac{(\bar{X}_n)^2}{n + \bar{X}_n^2}, \qquad V_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)(\bar{X}_n)^2.$$

Von diesen drei Folgen von Zufallsvariablen sind $a$ Folgen ($a \in \{0, \ldots, 3\}$) konsistente Schätzer für den Parameter $\theta = \mu^2$. $a$ ist gleich

**A37:** (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Aufgabe**
Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \theta/2)$ u.i.v mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Der Momentenschätzer für den Parameter $\theta$ ist

**A38:** (A) $0.5\bar{X}_n$. (B) $4\bar{X}_n$. (C) $2\bar{X}_n$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und unbekannten Parametern. Eine Stichprobe vom Umfang 20 liefert das Stichprobenmittel $\bar{x} = 200$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 80$.
Die obere Grenze des 0.9-Konfidenzintervalls für $\mu$ liegt in

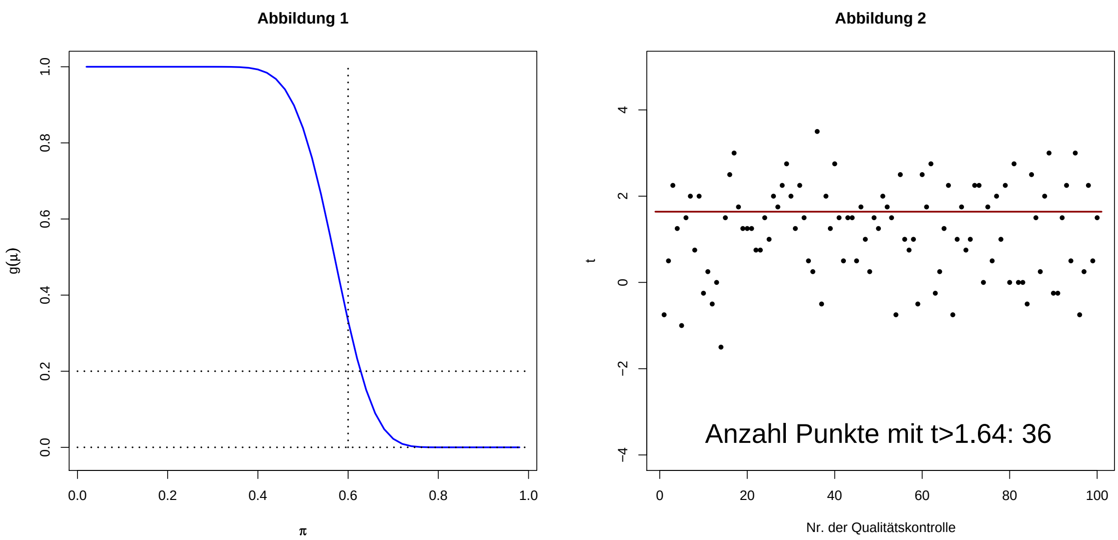
**A39:** (A) $(-\infty, 203.05]$. (B) $(203.05, 203.35]$. (C) $(203.35, 203.65]$. (D) $(203.65, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Erfolgsquote $\pi$ einer Behandlungsmethode für eine Krankheit soll geschätzt werden.
(a) Der Mindeststichprobenumfang für ein approximatives 0.98-Konfidenzintervall der Länge 0.05 liegt in

**A40:** (A) $[0, 750]$. (B) $(750, 1500]$. (C) $(1500, 3000]$. (D) $(3000, \infty)$.

(b) Die Anwendung der Behandlungsmethode auf 100 Patienten ergab 88 Heilungen. Das 0.95-Konfidenzintervall für $\pi$ enthält

**A41:** (A) 0.91 und 0.93. (B) 0.83 und 0.96. (C) 0.94 und 0.97. (D) 0.85 und 0.99.




**Aufgabe**
$\pi$ sei ein Parameter, der nur Werte in [0,1] annimmt. Testproblem 1 (TP1) sei

$$H_0 : \pi \leq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi > 0.6$$

und Testproblem 2 (TP2) sei

$$H_0 : \pi = 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi \neq 0.6.$$

Mit $g(\pi) = P_\pi$(„Test lehnt $H_0$ ab“) bezeichnen wir die Gütefunktion eines Tests. Die grafische Darstellung einer Gütefunktion für einen speziellen Test finden Sie in Abbildung 1. Der Test ist ein 0.2-Niveau-Test für

**A42:** (A) TP1 und TP2. (B) TP1, aber nicht TP2. (C) TP2, aber nicht TP1. (D) weder TP1 noch TP2.

**Aufgabe**
$\pi$ sei die Ausschussquote bei einer Qualitätskontrolle. Mit einem approximativen Binomialtest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ werde des Testproblem $H_0 : \pi \leq 0.2$ gegen $H_1 : \pi > 0.2$ untersucht. Dazu wurden 100 Qualitätskontrollen bei einer bekannten Ausschussquote von 0.25 simuliert. Abbildung 2 stellt die ermittelten Werte t der zugehörigen Teststatistik dar. Dann ist 0.64 ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

**A43:** (A) für den Fehler 1.Art. (B) eine richtige Entscheidung zu fällen.
(C) für den Fehler 2.Art.

**Aufgabe**
Für normalverteilte Daten mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 6.25$ soll folgendes Testproblem für den Erwartungswert $\mu$ untersucht werden: $H_0 : \mu = 10$ gegen $H_1 : \mu \neq 10$. Aus einer Stichprobe vom Umfang 25 wurde der Mittelwert $\bar{x} = 10.8$ ermittelt.
(a) Der Wert der Teststatistik liegt in

**A44:** (A) $(-\infty, 1.30]$. (B) $(1.30, 1.40]$. (C) $(1.40, 1.50]$. (D) $(1.50, \infty)$.

(b) Der p-Wert liegt in

**A45:** (A) $[0, 0.06]$. (B) $(0.06, 0.08]$. (C) $(0.08, 0.10]$. (D) $(0.10, 1]$.

**Aufgabe**
Für eine Nullhypothese $H_0$ und eine Alternative $H_1$ wurde ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ konstruiert.
Die Aussage „Wenn die Nullhypothese vorliegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Entscheidung zu treffen, stets größer oder gleich $1 - \alpha$." ist

**A46:** (A) stets richtig. (B) nicht stets richtig.

**Aufgabe**
Das Waschmittel „Wow" besaß im Januar 2011 einen Bekanntheitsgrad von 30 Prozent. Nach Einführung einer neuen Verpackungsform für „Wow" vermutet der Hersteller, dass der Bekanntheitsgrad $\pi$ im September auf über 36% gestiegen ist. Ein Marktforschungsinstitut befragt im Auftrag des Herstellers 400 zufällig ausgewählte Konsumenten, von denen 176 das Waschmittel „Wow" kennen. Mit einem statistischen Test zum Signifikanzniveau 0.0082, möchte der Hersteller zeigen, dass seine Vermutung stimmt.
Die Nullhypothese des Testproblems ist

**A47:** (A) $\pi \geq 0.36$. (B) $\pi \leq 0.36$. (C) $\pi = 0.36$. (D) $\pi \neq 0.36$.

Der Wert der Prüfgröße liegt in

**A48:** (A) $(-\infty, 2.5)$. (B) $[2.5, 3.0)$. (C) $[3.0, 3.5)$. (D) $[3.5, \infty)$.

Die Vermutung des Herstellers wird

**A49:** (A) bestätigt. (B) nicht bestätigt.

**Aufgabe**
Ein Hersteller von Rennrädern untersucht Fahrradketten der Fabrikate I und II auf ihre Laufleistung. Der Hersteller vermutet, dass die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat I länger als die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat II ist. Diese Vermutung soll mit einem Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.025$ bestätigt werden. Der Hersteller sammelt folgende Daten:

| | Fabrikat I (X) | Fabrikat II (Y) |
|---|---|---|
| Stichprobenumfang | 50 | 72 |
| Stichprobenmittel (in km) | 2115 | 2000 |
| Stichprobenvarianz (in km$^2$) | 90 000 | 129 600 |

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A50:** (A) $(-\infty, 1.89)$. (B) $[1.89, 1.94)$. (C) $[1.94, 1.99)$. (D) $[1.99, \infty)$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A51:** (A) $(-\infty, -1.80)$. (B) $[-1.80, 1.60)$. (C) $[1.60, 1.90)$. (D) $[1.90, \infty)$.

Die Testentscheidung lautet, dass Fahrradketten des Fabrikats I im Durchschnitt

**A52:** (A) nicht länger laufen (B) länger laufen

als die Ketten des Fabrikats II.

**Aufgabe**
Eine Fabrik produziert einen Artikel in zwei Produktionslinien, A und B. Eine Stichprobe von 250 Artikeln von Linie A ergab 14 Artikel mit Defekten; eine Stichprobe von 350 Artikeln von Linie B ergab 32 defekte Artikel. Man überprüfe mit einem geeigneten Test zum Niveau 0.05, ob die Aussschussquoten beider Produktionslinien gleich groß sind.
(a) Der *Betrag* des Wertes der Teststatistik liegt in

**A53:** (A) $[0, 1.40)$. (B) $[1.40, 1.60)$. (C) $[1.60, 1.80)$. (D) $[1.80, \infty)$.

(b) Die Aussage „Die Aussschussquoten beider Produktionslinien sind gleich groß.“ wird

**A54:** (A) bestätigt. (B) nicht bestätigt.

**Aufgabe**
Für zwei Merkmale X und Y sind folgende Zahlenpaare beobachtet worden:

$$(3, 5), \quad (1, 3), \quad (4, 5), \quad (2, 4), \quad (5, 6).$$

Dann gilt für den empirischen Korrelationskoeffizienten $r_{XY}$:

**A55:** (A) $r_{XY} = -1$. (B) $r_{XY} \in (-1, 0]$. (C) $r_{XY} \in (0, 1)$. (D) $r_{XY} = 1$.

**Aufgabe**
Gegeben sei das Standardmodell der linearen Einfachregression

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ bezeichnen die Schätzer für $\alpha$ und $\beta$. Aus einer konkreten Stichprobe wurden die Schätzewerte 5.2 bzw. 2.1 für $\alpha$ bzw. $\beta$ bestimmt. Dann gilt

**A56:** (A) $E(\hat{\beta}) = 2.1$. (B) $E(\hat{\beta}) = \beta$. (C) $E(\hat{\beta}) = 5.2$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
Eine Zeitschrift unterstellt für den Zusammenhang zwischen Werbeausgaben und der Anzahl der neuen Abonnenten in einer Periode i das einfache lineare Regressionsmodell

$$A_i = \alpha + \beta w_i + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, n, \quad n = 20.$$

Dabei bedeutet $w_i$ die eingesetzten Werbeausgaben [in 1000 Euro] und $A_i$ die Anzahl der neuen Abonnenten [in 1000] in Periode i. Es gelte $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Man vermutet, dass bei steigenden Werbeausgaben die Anzahl der neuen Abonnenten im Mittel zunimmt. Diese Vermutung soll mit einem geeigneten statistischen Test bestätigt werden (Signifikanzniveau 0.01).
Die Auswertung ergab für n=20 Paare von Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 24, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 121, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i = 3.$$

Das Bestimmtheitsmaß liegt in

**A57:** (A) $[0, 0.03)$. (B) $[0.03, 0.05)$. (C) $[0.05, 0.07)$. (D) $[0.07, \infty)$.

Die Nullhypothese lautet

**A58:** (A) $H_0 : \beta \geq 0$. (B) $H_0 : \beta = 0$. (C) $H_0 : \beta \neq 0$. (D) $H_0 : \beta \leq 0$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A59:** (A) $(-\infty, 2.35)$. (B) $[2.35, 2.55)$. (C) $[2.55, 2.75)$. (D) $[2.75, \infty)$.

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A60:** (A) $(-\infty, 0.95)$. (B) $[0.95, 1.10)$. (C) $[1.10, 1.25)$. (D) $[1.25, \infty)$.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

# Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

**FSS 2012, 1. Termin, 11. Juni 2012**
**Version: B**

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

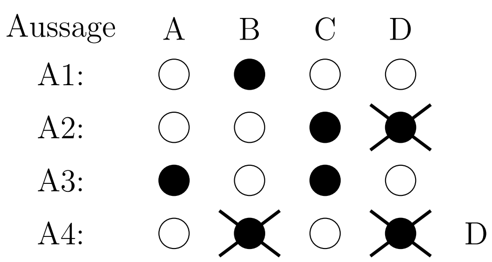
Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen




Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 32 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe**
Ein Investor möchte in 5 verschiedene Aktien einer Branche investieren. Er hat schon eine Vorauswahl von 15 Aktien vorgenommen. Sein Kapital möchte er dabei gemäß der Aufteilung 30%, 20%, 20%, 15%, 15% investieren.
Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, das Geld zu investieren, liegt in

**A1:** (A) $[0, 70\,000]$. (B) $(70\,000, 100\,000]$. (C) $(100\,000, 150\,000]$. (D) $(150\,000, \infty)$.

**Aufgabe**
Für die Beziehung zwischen zwei Ereignissen lässt sich folgendes formulieren: Wenn Ereignis A eintritt, dann tritt Ereignis B *nicht* ein. Welche der folgenden Beziehungen gilt dann stets:

**A2:** (A) $A \cap B = \emptyset$. (B) $A \cap \bar{B} = \emptyset$. (C) $\bar{A} \cap B = \emptyset$. (D) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

**Aufgabe**
Eine Buchhandlung hat 14 verschiedene Kochbücher vorrätig, von denen 6 nur vegetarische Rezepte enthalten. Egon wählt 2 verschiedene Kochbücher zufällig aus.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens ein Kochbuch mit nur vegetarischen Rezepten auswählt, liegt in

**A3:** (A) $[0, 0.62]$. (B) $(0.62, 0.72]$. (C) $(0.72, 0.82]$. (D) $(0.82, 1]$.

**Aufgabe**
Für die Ereignisse A und B sei folgendes bekannt: $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$. Dann ist $P(B\,|A)$ in

**A4:** (A) $[0, 0.35]$. (B) $(0.35, 0.40]$. (C) $(0.40, 0.45]$. (D) $(0.45, 1]$.

**Aufgabe**
$A$ und $B$ seien Ereignisse mit $0 < P(A), P(B) < 1$ zu einem Ergebnisraum $\Omega$.
(a) Dann ist die Aussage $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**A5:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) A und B bilden eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$. Dann gilt stets

**A6:** (A) $A \cup B = \Omega$. (B) $A \cup B = A$. (C) $A \cup B = B$. (D) $A \cup B = \emptyset$.

**Aufgabe**
Zur Feststellung einer Krankheit $K$ werde ein Test $A$ durchgeführt. Wenn ein Patient krank ist, dann liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.9 ein positives Ergebnis. Wenn der Patient gesund ist, zeigt der Test immer noch mit Wahrscheinlichkeit 0.05 ein positives Resultat. Es wird davon ausgegangen, dass 2% der untersuchten Personen tatsächlich an der Krankheit $K$ leiden. Für eine zufällig ausgewählte Person liegt die Wahrscheinlichkeit
(a) für ein positives Ergebnis des Tests in

**A7:** (A) $[0, 0.069]$. (B) $(0.069, 0.0.072]$. (C) $(0.072, 0.075]$. (D) $(0.075, 1]$.

(b) nicht krank zu sein, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt, in

**A8:** (A) $[0, 0.65]$. (B) $(0.65, 0.68]$. (C) $(0.68, 0.71]$. (D) $(0.71, 1]$.

**Aufgabe**
In der Gruppenphase eines Fußballturniers muss eine Mannschaft gegen drei andere Mannschaften antreten, wobei aus historischer Erfahrung davon ausgegangen wird, dass sie die Mannschaften mit Wahrscheinlichkeit 0.7, 0.6 bzw. 0.5 unabhängig von einander besiegen kann.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft, mindestens zwei der drei Spiele gewinnt, liegt in

**A9:** (A) $[0, 0.63]$. (B) $(0.63, 0.67]$. (C) $(0.67, 0.71]$. (D) $(0.71, 1]$.

**Aufgabe**
F sei die Verteilungsfunktion und f die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariable mit Träger $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$.
(a) Es gilt $F(a_1) = f(a_1)$. Die Aussage ist

**A10:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) F ist stetig. Die Aussage ist

**A11:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

**Aufgabe**
Es werde wiederholt ein idealer Würfel geworfen. X gebe an, wie viele Würfe notwendig waren, bis das erste Mal eine *Fünf* oder *Sechs* geworfen wurde. Für die Wurfergebnisse 1,4,6,5,... wäre z.B. X=3.
(a) Der Träger von $X$ ist

**A12:** (A) $\mathbb{R}$. (B) $[1, \infty)$. (C) $\{1, 2, \ldots, 6\}$. (D) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

(b) $P(X = 4)$ liegt in

**A13:** (A) $[0, 0.06]$. (B) $(0.06, 0.09]$. (C) $(0.09, 0.12]$. (D) $(0.12, 1]$.

**Aufgabe**
Die Zufallsvariable X sei diskret verteilt gemäß Wahrscheinlichkeitstabelle

| x | -2 | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0.3 | 0.4 | 0.1 | 0.2 |

(a) $P(X \leq 0)$ liegt in

**A14:** (A) $[0, 0.25]$. (B) $(0.25, 0.45]$. (C) $(0.45, 0.65]$. (D) $(0.65, 1\,]$.

(b) Die Varianz von X ist in

**A15:** (A) $[0, 3.1]$. (B) $(3.1, 3.3]$. (C) $(3.3, 3.5]$. (D) $(3.5, \infty)$.

**Aufgabe**
Die diskrete Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 0.25 I_{[-2,1)}(x) + 0.5 I_{[1,2)}(x) + I_{[2,\infty)}(x).$$

Der Erwartungswert von X liegt in

**A16:** (A) $(-\infty, 0.50]$. (B) $(0.50, 0.60]$. (C) $(0.60, 0.70]$. (D) $(0.70, \infty)$.

**Aufgabe**
$X$ sei stetig verteilt mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{2}{3}\, x^3\, I_{(0,1]}(x) + \frac{5}{12}\, I_{(1,3)}(x).$$

(a) F(2.5) liegt in

**A17:** (A) [0,0.72). (B) [0.72,0.77]. (C) (0.77,0.82). (D) [0.82,1].

(b) $E(X)$ ist in

**A18:** (A) $(-\infty$,1.50]. (B) (1.50,1.60]. (C) (1.60,1.70]. (D) (1.70,$\infty$).

(c) Das 0.8-Quantil zu X liegt im Intervall

**A19:** (A) $(-\infty$,2.50]. (B) (2.50,2.56]. (C) (2.56,2.62]. (D) (2.62,$\infty$).

**Aufgabe**
Der monatliche Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts wird als Zufallsvariable aufgefasst und betrage im Mittel 120 (alle Angaben in kWh) bei einer Standardabweichung 25. Der Energieverbrauch der verschiedenen Monate eines Jahres mögen sich nicht beeinflussen.
(a) Der Erwartungswert des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A20:** (A) $(-\infty, 1100]$ (B) $(1100, 1250]$. (C) $(1250, 1400]$. (D) $(1400, \infty)$.

(b) Die Varianz des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A21:** (A) $[0, 7000]$. (B) $(7000, 8000]$. (C) $(8000, 9000]$. (D) $(9000, \infty)$.

**Aufgabe**
$X_1, \dots, X_n$ seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.
Welche der Aussagen ist *falsch*!

**A22:** (A) $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$. (B) $E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n \cdot \mu^2$. (C) $Var(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) = \sigma^2/n$.

**Aufgabe**
Bei der Lotterie „7 aus 37“ kreuzt man auf dem Tippschein 7 aus 37 möglichen Zahlen an. Bei der Ziehung der Lotterie werden dann 7 aus den 37 Zahlen ohne Zurücklegen gezogen. Wir gehen davon aus, dass 6 000 000 Tippscheine zufällig und unabhängig voneinander ausgefüllt werden. Die Anzahl der Tippscheine, auf denen alle Zahlen richtig angekreuzt wurden, ist dann approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$ in

**A23:** (A) $(0, 0.54]$. (B) $(0.54, 0.57]$. (C) $(0.57, 0.60]$. (D) $(0.60, \infty)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf mindestens zwei Tippscheinen alle Zahlen richtig getippt wurden, liegt in

**A24:** (A) $(0, 0.085]$. (B) $(0.085, 0.105]$. (C) $(0.105, 0.125]$. (D) $(0.125, 1]$.

**Aufgabe**
Beim Ausspielen eines Würfels trete die Augenzahl ‚1' mit Wahrscheinlichkeit 0.2 auf.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 6-maligen Ausspielen des Würfels genau 2 Mal die Augenzahl ‚1' auftritt, liegt in

**A25:** (A) $[0, 0.20]$. (B) $(0.20, 0.23]$. (C) $(0.23, 0.26]$. (D) $(0.26, 1]$.

**Aufgabe**
X sei standardnormalverteilt. Es gelte $P(a \leq 2X + 3 \leq 6) = 0.2$.
$a$ liegt in

**A26:** (A) $(-\infty, 4.4]$. (B) $(4.4, 4.7]$. (C) $(4.7, 5.0]$. (D) $(5.0, \infty)$.

**Aufgabe**
Der Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts sei normalverteilt mit Erwartungswert 1200 (alle Angaben in kWh) und Standardabweichung 250. Für eine kWh sind beim Stromanbieter 22 Cent zu bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass für den Stromverbrauch höchstens 320 Euro zu bezahlen sind, liegt in

**A27:** (A) $[0, 0.79]$. (B) $(0.79, 0.81]$. (C) $(0.81, 0.83]$. (D) $(0.83, 1]$.

**Aufgabe**
Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsvariable X und Y sei

| $x_i \setminus y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.2 | 0.2 |
| 1 | 0.1 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |

(a) $P(|X - Y| \leq 0.5)$ liegt in

**A28:** (A) $[0, 0.1]$. (B) $(0.1, 0.2]$. (C) $(0.2, 0.3]$. (D) $(0.3, 1]$.

(b) Cov(X,Y) ist in

**A29:** (A) $(-\infty, -0.45]$. (B) $(-0.45, -0.35]$. (C) $(-0.35, -0.25]$. (D) $(-0.25, \infty)$.

(c) $E(X|Y = 1)$ ist in

**A30:** (A) $(-\infty, 0.60]$. (B) $(0.60, 0.70]$. (C) $(0.70, 0.80]$. (D) $(0.80, \infty)$.

**Aufgabe**
Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X, Y)$ sei stetig verteilt mit Dichtefunktion

$$f(x, y) = c \cdot x^2 \cdot (1 + y^2) I_{[0,2]}(x) I_{[-1,1]}(y).$$

$c$ liegt im Intervall

**A31:** (A) $[0, 0.13]$. (B) $(0.13, 0.15]$. (C) $(0.15, 0.17]$. (D) $(0.17, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Renditen X und Y zweier Aktien, $A_X$ und $A_Y$, seien normalverteilt (alle Angaben in Prozent): $X \sim N(6, 6.25)$ und $Y \sim N(2, 2.25)$. Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y betrage 0.6. Ein Investor möchte 60% seines Geldes in Aktie $A_X$ und den Rest in $A_Y$ investieren.
(a) Die erwartete Rendite des Investment liegt in

**A32:** (A) $(-\infty, 4.5]$. (B) $(4.5, 4.8]$. (C) $(4.8, 5.1]$. (D) $(5.1, \infty)$.

(b) Die Standardabweichung des Investments liegt in

**A33:** (A) $[0, 1.77]$. (B) $(1.77, 1.97]$. (C) $(1.97, 2.17]$. (D) $(2.17, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 90 maligen Werfen eines Würfels mindestens 25 Mal eine ‚6' geworfen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit eine ‚6' zu werfen 0.3 beträgt, liegt in

**A34:** (A) $[0, 0.655]$. (B) $(0.655, 0.675]$. (C) $(0.675, 0.695]$. (D) $(0.695, 1]$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit unbekannten Erwartungswert $E(X) = \mu$ und unbekannter Varianz $\mathrm{Var(X)}=\sigma^2 > 0$.
(a) Welcher der folgenden erwartungstreuen Schätzer für $\mu$ hat die kleinste Varianz?

**A35:** (A) $0.2X_1 + 0.2X_2 + 0.6X_3$. (B) $0.6X_2 + 0.4X_3$. (C) $X_2$. (D) $0.5X_1 + 0.5X_2$.

(b) Ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2$ ist

**A36:** (A) $X_1^2 - \mu^2$. (B) $X_2^2$. (C) $X_3^2 - X_1X_2$. (D) (A)-(C) sind falsch.

(c) Es seien

$$T_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(\bar{X}_n)^2, \qquad U_n = (\bar{X}_n)^2, \qquad V_n = \left(\frac{1}{n} + \bar{X}_n\right) \cdot \left(\frac{2}{n} + \bar{X}_n\right).$$

Von diesen drei Folgen von Zufallsvariablen sind $a$ Folgen ($a \in \{0, \ldots, 3\}$) konsistente Schätzer für den Parameter $\theta = \mu^2$. $a$ ist gleich

**A37:** (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Aufgabe**
Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Exp}(2\theta)$ u.i.v mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Der Momentenschätzer für den Parameter $\theta$ ist

**A38:** (A) $4/\bar{X}_n$. (B) $0.25/\bar{X}_n$. (C) $2/\bar{X}_n$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und unbekannten Parametern. Eine Stichprobe vom Umfang 25 liefert das Stichprobenmittel $\bar{x} = 160$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 100$.
Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für $\mu$ liegt in

**A39:** (A) $(-\infty, 164.0]$. (B) $(164.0, 164.3]$. (C) $(164.3, 164.6]$. (D) $(164.6, \infty)$.

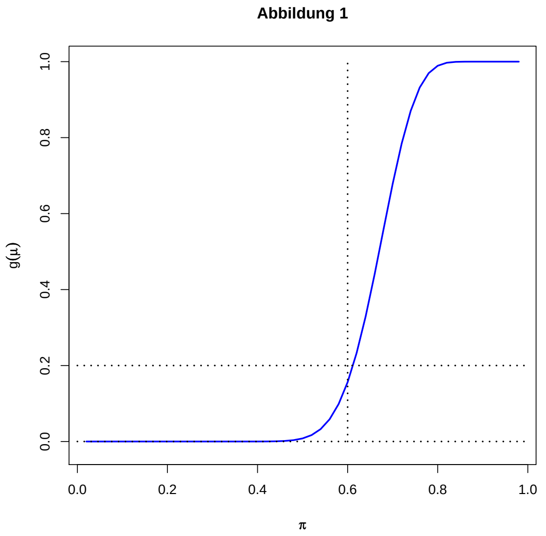
**Aufgabe**

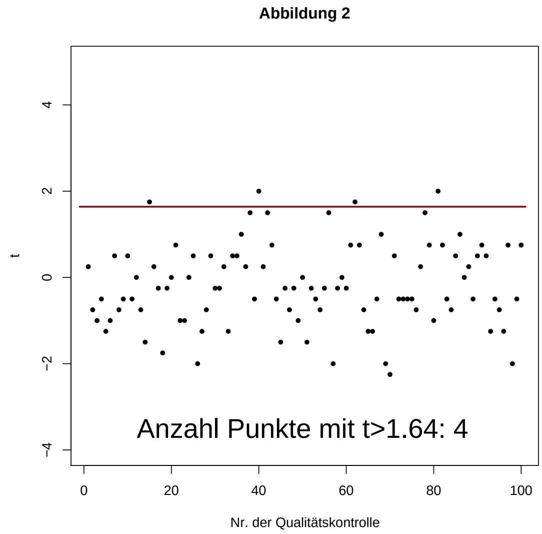
Die Erfolgsquote $\pi$ einer Behandlungsmethode für eine Krankheit soll geschätzt werden.
(a) Der Mindeststichprobenumfang für ein approximatives 0.96-Konfidenzintervall der Länge 0.02 liegt in

**A40:** (A) $[0, 2\,500]$. (B) $(2\,500, 5\,000]$. (C) $(5\,000, 10\,000]$. (D) $(10\,000, \infty)$.

(b) Die Anwendung der Behandlungsmethode auf 100 Patienten ergab 78 Heilungen. Das 0.99-Konfidenzintervall für $\pi$ enthält

**A41:** (A) 0.65 und 0.84. (B) 0.70 und 0.86. (C) 0.74 und 0.90. (D) 0.77 und 0.93.




**Aufgabe**

$\pi$ sei ein Parameter, der nur Werte in [0,1] annimmt. Testproblem 1 (TP1) sei

$$H_0 : \pi \geq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi < 0.6$$

und Testproblem 2 (TP2) sei

$$H_0 : \pi \leq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi > 0.6.$$

Mit $g(\pi) = P_\pi$(„Test lehnt $H_0$ ab“) bezeichnen wir die Gütefunktion eines Tests. Die grafische Darstellung einer Gütefunktion für einen speziellen Test finden Sie in Abbildung 1. Der Test ist ein 0.2-Niveau-Test für

**A42:** (A) TP1 und TP2. (B) TP1, aber nicht TP2. (C) TP2, aber nicht TP1. (D) weder TP1 noch TP2.

**Aufgabe**

$\pi$ sei die Ausschussquote bei einer Qualitätskontrolle. Mit einem approximativen Binomialtest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ werde des Testproblem $H_0 : \pi \leq 0.2$ gegen $H_1 : \pi > 0.2$ untersucht. Dazu wurden 100 Qualitätskontrollen bei einer bekannten Ausschussquote von 0.19 simuliert. Abbildung 2 stellt die ermittelten Werte t der zugehörigen Teststatistik dar. Dann ist 0.04 ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

**A43:** (A) für den Fehler 1.Art. (B) eine richtige Entscheidung zu fällen. (C) für den Fehler 2.Art.

**Aufgabe**
Für normalverteilte Daten mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 2.56$ soll folgendes Testproblem für den Erwartungswert $\mu$ untersucht werden: $H_0 : \mu \leq 10$ gegen $H_1 : \mu > 10$. Aus einer Stichprobe vom Umfang 16 wurde der Mittelwert $\bar{x} = 10.8$ ermittelt.
(a) Der Wert der Teststatistik liegt in

**A44:** (A) $(-\infty, 2.05]$. (B) $(2.05, 2.15]$. (C) $(2.15, 2.25]$. (D) $(2.25, \infty)$.

(b) Der p-Wert liegt in

**A45:** (A) $[0, 0.015]$. (B) $(0.015, 0.018]$. (C) $(0.018, 0.021]$. (D) $(0.021, 1]$.

**Aufgabe**
Für eine Nullhypothese $H_0$ und eine Alternative $H_1$ wurde ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ konstruiert.
Die Aussage „Die Wahrscheinlichkeit, eine Fehlentscheidung zu treffen, ist stets kleiner oder gleich $\alpha$.“ ist

**A46:** (A) stets richtig. (B) nicht stets richtig.

**Aufgabe**
Das Waschmittel „Wow“ besaß im Januar 2011 einen Bekanntheitsgrad von 30 Prozent. Nach Einführung einer neuen Verpackungsform für „Wow“ vermutet der Hersteller, dass der Bekanntheitsgrad $\pi$ im September auf über 40% gestiegen ist. Ein Marktforschungsinstitut befragt im Auftrag des Herstellers 500 zufällig ausgewählte Konsumenten, von denen 230 das Waschmittel „Wow“ kennen. Mit einem statistischen Test zum Signifikanzniveau 0.0228, möchte der Hersteller zeigen, dass seine Vermutung stimmt.
Die Nullhypothese des Testproblems ist

**A47:** (A) $\pi = 0.40$. (B) $\pi \neq 0.40$. (C) $\pi \leq 0.40$. (D) $\pi \geq 0.40$.

Der Wert der Prüfgröße liegt in

**A48:** (A) $(-\infty, 2.3)$. (B) $[2.3, 2.6)$. (C) $[2.6, 2.9)$. (D) $[2.9, \infty)$.

Die Vermutung des Herstellers wird

**A49:** (A) nicht bestätigt. (B) bestätigt.

**Aufgabe**
Ein Hersteller von Rennrädern untersucht Fahrradketten der Fabrikate I und II auf ihre Laufleistung. Der Hersteller vermutet, dass die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat I länger als die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat II ist. Diese Vermutung soll mit einem Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ bestätigt werden. Der Hersteller sammelt folgende Daten:

| | Fabrikat I (X) | Fabrikat II (Y) |
|---|---|---|
| Stichprobenumfang | 60 | 82 |
| Stichprobenmittel (in km) | 2215 | 2100 |
| Stichprobenvarianz (in km$^2$) | 90 000 | 109 600 |

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A50:** (A) $(-\infty, 2.13)$. (B) $[2.13, 2.19)$. (C) $[2.19, 2.25)$. (D) $[2.25, \infty)$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A51:** (A) $(-\infty, 1.94)$. (B) $[1.94, 2.05)$. (C) $[2.05, 2.25)$. (D) $[2.25, \infty)$.

Die Testentscheidung lautet, dass Fahrradketten des Fabrikats I im Durchschnitt

**A52:** (A) nicht länger laufen (B) länger laufen

als die Ketten des Fabrikats II.

**Aufgabe**
Eine Fabrik produziert einen Artikel in zwei Produktionslinien, A und B. Eine Stichprobe von 300 Artikeln von Linie A ergab 16 Artikel mit Defekten; eine Stichprobe von 400 Artikeln von Linie B ergab 35 defekte Artikel. Es soll mit einem geeigneten Test zum Niveau 0.05 gezeigt werden, dass die Ausschussquote von Linie B größer als von Linie A ist.
(a) Der *Betrag* des Wertes der Teststatistik liegt in

**A53:** (A) $(-\infty, 1.50)$. (B) $[1.50, 1.70)$. (C) $[1.70, 1.90)$. (D) $[1.90, \infty)$.

(b) Die Aussage „Die Aussschussquote von Linie B ist größer als von Linie A.“ wird

**A54:** (A) bestätigt. (B) nicht bestätigt.

**Aufgabe**
Für zwei Merkmale X und Y sind folgende Zahlenpaare beobachtet worden:

$$(3, 5), \quad (1, 7), \quad (4, 4), \quad (2, 6), \quad (5, 3).$$

Dann gilt für den empirischen Korrelationskoeffizienten $r_{XY}$:

**A55:** (A) $r_{XY} = -1$. (B) $r_{XY} \in (-1, 0]$. (C) $r_{XY} \in (0, 1)$. (D) $r_{XY} = 1$.

**Aufgabe**
Gegeben sei das Standardmodell der linearen Einfachregression

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ bezeichnen die Schätzer für $\alpha$ und $\beta$. Aus einer konkreten Stichprobe wurden die Schätzewerte 5.2 bzw. 2.1 für $\alpha$ bzw. $\beta$ bestimmt. Dann gilt

**A56:** (A) $E(\hat{\alpha}) = 5.2$. (B) $E(\hat{\alpha}) = \alpha$. (C) $E(\hat{\alpha}) = 2.1$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
Eine Zeitschrift unterstellt für den Zusammenhang zwischen Werbeausgaben und der Anzahl der neuen Abonnenten in einer Periode i das einfache lineare Regressionsmodell

$$A_i = \alpha + \beta w_i + \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n, \quad n = 15.$$

Dabei bedeutet $w_i$ die eingesetzten Werbeausgaben [in 1000 Euro] und $A_i$ die Anzahl der neuen Abonnenten [in 1000] in Periode i. Es gelte $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Man vermutet, dass bei steigenden Werbeausgaben die Anzahl der neuen Abonnenten im Mittel zunimmt. Diese Vermutung soll mit einem geeigneten statistischen Test bestätigt werden (Signifikanzniveau 0.01).
Die Auswertung ergab für n=15 Paare von Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 6, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 48, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i = 2.$$

Das Bestimmtheitsmaß liegt in

**A57:** (A) $[0, 0.07)$. (B) $[0.07, 0.09)$. (C) $[0.09, 0.11)$. (D) $[0.11, \infty)$.

Die Nullhypothese lautet

**A58:** (A) $H_0 : \beta \leq 0$. (B) $H_0 : \beta = 0$. (C) $H_0 : \beta \geq 0$. (D) $H_0 : \beta \neq 0$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A59:** (A) $(-\infty, 2.64)$. (B) $[2.64, 2.76)$. (C) $[2.76, 2.88)$. (D) $[2.88, \infty)$.

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A60:** (A) $(-\infty, 0.75)$. (B) $[0.75, 0.85)$. (C) $[0.85, 0.95)$. (D) $[0.95, \infty)$.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

# Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

**FSS 2012, 1. Termin, 11. Juni 2012**
**Version: C**

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen

| Aussage | A | B | C | D | |
|---|---|---|---|---|---|
| A1: | ○ | ● | ○ | ○ | |
| A2: | ○ | ○ | ● | ~~●~~ | |
| A3: | ● | ○ | ● | ○ | |
| A4: | ○ | ~~●~~ | ○ | ~~●~~ | D |

Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 32 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe**

Ein Investor möchte in 5 verschiedene Aktien einer Branche investieren. Er hat schon eine Vorauswahl von 14 Aktien vorgenommen. Sein Kapital möchte er dabei gemäß der Aufteilung 30%, 20%, 20%, 20%, 10% investieren.
Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, das Geld zu investieren, liegt in

**A1:** (A) $[0, 12\,000]$. (B) $(12\,000, 24\,000]$. (C) $(24\,000, 48\,000]$. (D) $(48\,000, \infty)$.

**Aufgabe**

Für die Beziehung zwischen zwei Ereignissen lässt sich folgendes formulieren: Wenn Ereignis B eintritt, dann tritt auch Ereignis A ein. Welche der folgenden Beziehungen gilt dann stets:

**A2:** (A) $A \cap \bar{B} = \emptyset$. (B) $\bar{A} \cap B = \emptyset$. (C) $A \cap B = \emptyset$. (D) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

**Aufgabe**

Eine Buchhandlung hat 12 verschiedene Kochbücher vorrätig, von denen 4 nur vegetarische Rezepte enthalten. Egon wählt 2 verschiedene Kochbücher zufällig aus.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens ein Kochbuch mit nur vegetarischen Rezepten auswählt, liegt in

**A3:** (A) $[0, 0.50]$. (B) $(0.50, 0.60]$. (C) $(0.60, 0.70]$. (D) $(0.70, 1]$.

**Aufgabe**

Für die Ereignisse A und B sei folgendes bekannt: $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$. Dann ist $P(A|B)$ in

**A4:** (A) $[0, 0.3]$. (B) $(0.3, 0.4]$. (C) $(0.4, 0.5]$. (D) $(0.5, 1]$.

**Aufgabe**

$A$ und $B$ seien Ereignisse mit $0 < P(A), P(B) < 1$ zu einem Ergebnisraum $\Omega$.
(a) Dann ist die Aussage $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**A5:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) A und B bilden eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$. Dann gilt stets

**A6:** (A) $A \cap B = \Omega$. (B) $A \cap B = A$. (C) $A \cap B = B$. (D) $A \cap B = \emptyset$.

**Aufgabe**

Zur Feststellung einer Krankheit $K$ werde ein Test $A$ durchgeführt. Wenn ein Patient krank ist, dann liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.95 ein positives Ergebnis. Wenn der Patient gesund ist, zeigt der Test immer noch mit Wahrscheinlichkeit 0.02 ein positives Resultat. Es wird davon ausgegangen, dass 3% der untersuchten Personen tatsächlich an der Krankheit $K$ leiden. Für eine zufällig ausgewählte Person liegt die Wahrscheinlichkeit
(a) für ein positives Ergebnis des Tests in

**A7:** (A) $[0, 0.046]$. (B) $(0.046, 0.049]$. (C) $(0.049, 0.052]$. (D) $(0.052, 1]$.

(b) nicht krank zu sein, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt, in

**A8:** (A) $[0, 0.33]$. (B) $(0.33, 0.36]$. (C) $(0.36, 0.39]$. (D) $(0.39, 1]$.

**Aufgabe**
In der Gruppenphase eines Fußballturniers muss eine Mannschaft gegen drei andere Mannschaften antreten, wobei aus historischer Erfahrung davon ausgegangen wird, dass sie die Mannschaften mit Wahrscheinlichkeit 0.8, 0.7 bzw. 0.5 unabhängig von einander besiegen kann.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft, mindestens zwei der drei Spiele gewinnt, liegt in

**A9:** (A) $[0, 0.74]$. (B) $(0.74, 0.78]$. (C) $(0.78, 0.82]$. (D) $(0.82, 1]$.

**Aufgabe**
F sei die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable X.
(a) $P(X = x) > 0$ für x aus dem Träger zu X. Die Aussage ist

**A10:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) $F$ ist nicht stetig. Die Aussage ist

**A11:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

**Aufgabe**
Es werde wiederholt ein idealer Würfel geworfen. X gebe an, wie viele Würfe notwendig waren, bis das erste Mal eine Sechs geworfen wurde. Für die Wurfergebnisse 3,1,6,2,... wäre z.B. X=3.
(a) Der Träger von $X$ ist

**A12:** (A) $[1, \infty)$. (B) $\{1, 2, \ldots, 6\}$. (C) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (D) $\mathbb{R}$.

(b) $P(X = 4)$ liegt in

**A13:** (A) $[0, 0.07]$. (B) $(0.07, 0.09]$. (C) $(0.09, 0.11]$. (D) $(0.11, 1]$.

**Aufgabe**
Die Zufallsvariable X sei diskret verteilt gemäß Wahrscheinlichkeitstabelle

| x | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

(a) $P(0 < X \leq 1)$ liegt in

**A14:** (A) $[0, 0.3]$. (B) $(0.3, 0.4]$. (C) $(0.4, 0.5]$. (D) $(0.5, 1]$.

(b) Die Varianz von X ist in

**A15:** (A) $[0, 0.81]$. (B) $(0.81, 0.85]$. (C) $(0.85, 0.89]$. (D) $(0.89, \infty)$.

**Aufgabe**
Die diskrete Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 0.4I_{[-1,0)}(x) + 0.7I_{[0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

Der Erwartungswert von X liegt in

**A16:** (A) $(-\infty, -0.05]$. (B) $(-0.05, 0.05]$. (C) $(0.05, 0.15]$. (D) $(0.15, \infty)$.

**Aufgabe**
$X$ sei stetig verteilt mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{2}{3}\,x^2\,I_{(0,1]}(x) + \frac{7}{9}\,I_{(1,2)}(x).$$

(a) F(1.5) liegt in

**A17:** (A) [0,0.58). (B) [0.58,0.62]. (C) (0.62,0.66). (D) [0.66,1].

(b) $E(X)$ ist in

**A18:** (A) (-$\infty$,1.20]. (B) (1.20,1.30]. (C) (1.30,1.40]. (D) (1.40,$\infty$).

(c) Das 0.7-Quantil zu X liegt im Intervall

**A19:** (A) (-$\infty$,1.63]. (B) (1.63,1.68]. (C) (1.68,1.73]. (D) (1.73,$\infty$).

**Aufgabe**
Der monatliche Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts wird als Zufallsvariable aufgefasst und betrage im Mittel 120 (alle Angaben in kWh) bei einer Standardabweichung 20. Der Energieverbrauch der verschiedenen Monate eines Jahres mögen sich nicht beeinflussen.
(a) Der Erwartungswert des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A20:** (A) $(-\infty, 1500]$ (B) $(1500, 1600]$. (C) $(1600, 1700]$. (D) $(1700, \infty)$.

(b) Die Varianz des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A21:** (A) $[0, 4600]$. (B) $(4600, 4900]$. (C) $(4900, 5200]$. (D) $(5200, \infty)$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.
Welche der Aussagen ist *falsch*!

**A22:** (A) $E(X_1 - \mu)^2 = \sigma^2$. (B) $E(\sum_{i=1}^n X_i) = n \cdot \mu$. (C) $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2) = \sigma^2$.

**Aufgabe**
Bei der Lotterie „6 aus 36“ kreuzt man auf dem Tippschein 6 aus 36 möglichen Zahlen an. Bei der Ziehung der Lotterie werden dann 6 aus den 36 Zahlen ohne Zurücklegen gezogen. Wir gehen davon aus, dass 900 000 Tippscheine zufällig und unabhängig voneinander ausgefüllt werden. Die Anzahl der Tippscheine, auf denen alle Zahlen richtig angekreuzt wurden, ist dann approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$ in

**A23:** (A) $(0, 0.50]$. (B) $(0.50, 0.55]$. (C) $(0.55, 0.60]$. (D) $(0.60, \infty)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf mindestens zwei Tippscheinen alle Zahlen richtig getippt wurden, liegt in

**A24:** (A) $(0, 0.075]$. (B) $(0.075, 0.080]$. (C) $(0.080, 0.085]$. (D) $(0.085, 1]$.

**Aufgabe**
Beim Ausspielen eines Würfels trete die Augenzahl ‚1' mit Wahrscheinlichkeit 0.1 auf.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 5-maligen Ausspielen des Würfels genau 2 Mal die Augenzahl ‚1' auftritt, liegt in

**A25:** (A) $[0, 0.060]$. (B) $(0.060, 0.065]$. (C) $(0.065, 0.070]$. (D) $(0.070, 1]$.

**Aufgabe**
X sei standardnormalverteilt. Es gelte $P(a \leq 2X + 1 \leq 5) = 0.2$.
$a$ liegt in

**A26:** (A) $(-\infty, 2.1]$. (B) $(2.1, 2.4]$. (C) $(2.4, 2.7]$. (D) $(2.7, \infty)$.

**Aufgabe**
Der Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts sei normalverteilt mit Erwartungswert 1500 (alle Angaben in kWh) und Standardabweichung 350. Für eine kWh sind beim Stromanbieter 24 Cent zu bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass für den Stromverbrauch mehr als 400 Euro zu bezahlen sind, liegt in

**A27:** (A) $[0, 0.24]$. (B) $(0.24, 0.27]$. (C) $(0.27, 0.30]$. (D) $(0.30, 1]$.

**Aufgabe**
Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsvariable X und Y sei

| $x_i \setminus y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| 1 | 0.1 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0.1 | 0.1 | 0.2 |

(a) $P(|X - Y| \leq 1)$ liegt in

**A28:** (A) $[0, 0.65]$. (B) $(0.65, 0.75]$. (C) $(0.75, 0.85]$. (D) $(0.85, 1]$.

(b) Cov(X,Y) ist in

**A29:** (A) $(-\infty, 0]$. (B) $(0, 0.20]$. (C) $(0.20, 0.30]$. (D) $(0.30, \infty)$.

(c) $E(Y|X = 1)$ ist in

**A30:** (A) $(-\infty, 0.95]$. (B) $(0.95, 1.05]$. (C) $(1.05, 1.15]$. (D) $(1.15, \infty)$.

**Aufgabe**
Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X, Y)$ sei stetig verteilt mit Dichtefunktion

$$f(x, y) = c \cdot x \cdot (1 + y^2) I_{[0,2]}(x) I_{[-1,1]}(y).$$

$c$ liegt im Intervall

**A31:** (A) $[0, 0.175]$. (B) $(0.175, 0.195]$. (C) $(0.195, 0.215]$. (D) $(0.215, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Renditen X und Y zweier Aktien, $A_X$ und $A_Y$, seien normalverteilt (alle Angaben in Prozent): $X \sim N(6, 9)$ und $Y \sim N(3, 4)$. Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y betrage -0.7. Ein Investor möchte 30% seines Geldes in Aktie $A_X$ und den Rest in $A_Y$ investieren.
(a) Die erwartete Rendite des Investment liegt in

**A32:** (A) $(-\infty, 3.5]$. (B) $(3.5, 3.8]$. (C) $(3.8, 4.1]$. (D) $(4.1, \infty)$.

(b) Die Standardabweichung des Investments liegt in

**A33:** (A) $[0, 0.90]$. (B) $(0.90, 1.20]$. (C) $(1.20, 1.50]$. (D) $(1.50, \infty)$.

**Aufgabe**
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 60 maligen Werfen eines Würfels mindestens 22 Mal eine ‚6' geworfen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit eine ‚6' zu werfen 0.4 beträgt, liegt in

**A34:** (A) $[0, 0.735]$. (B) $(0.735, 0.755]$. (C) $(0.755, 0.775]$. (D) $(0.775, 1]$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit unbekannten Erwartungswert $E(X) = \mu$ und unbekannter Varianz Var(X)=$\sigma^2 > 0$.
(a) Welcher der folgenden erwartungstreuen Schätzer für $\mu$ hat die kleinste Varianz?

**A35:** (A) $0.5X_1 + 0.5X_2$. (B) $0.6X_1 + 0.4X_3$. (C) $X_2$. (D) $0.7X_1 + 0.1X_2 + 0.2X_3$.

(b) Ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2$ ist

**A36:** (A) $X_1^2 - X_2^2$. (B) $(X_1 - X_2)^2$. (C) $(X_1 - \mu)^2$. (D) (A)-(C) sind falsch.

(c) Es seien

$$T_n = (\bar{X}_n)^2, \qquad U_n = \frac{(\bar{X}_n)^2}{n + \bar{X}_n^2}, \qquad V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Von diesen drei Folgen von Zufallsvariablen sind $a$ Folgen ($a \in \{0, \ldots, 3\}$) konsistente Schätzer für den Parameter $\theta = \mu^2$. $a$ ist gleich

**A37:** (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Aufgabe**
Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \theta/3)$ u.i.v mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Der Momentenschätzer für den Parameter $\theta$ ist

**A38:** (A) $\frac{1}{3}\bar{X}_n$. (B) $3\bar{X}_n$. (C) $\bar{X}_n$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und unbekannten Parametern. Eine Stichprobe vom Umfang 20 liefert das Stichprobenmittel $\bar{x} = 240$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 80$.
Die obere Grenze des 0.9-Konfidenzintervalls für $\mu$ liegt in

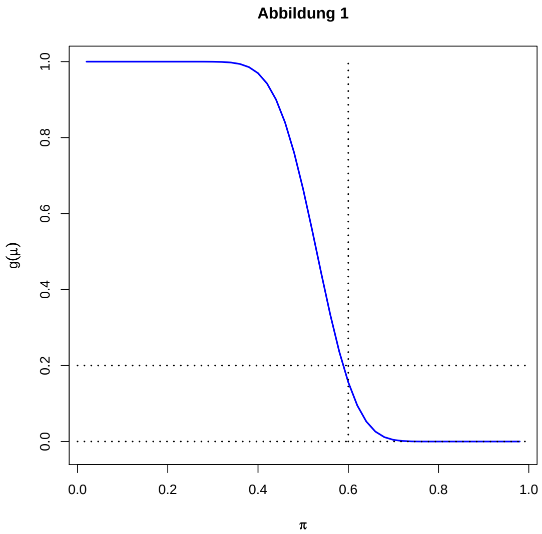
**A39:** (A) $(-\infty, 242.95]$. (B) $(242.95, 243.15]$. (C) $(243.15, 243.35]$. (D) $(243.35, \infty)$.

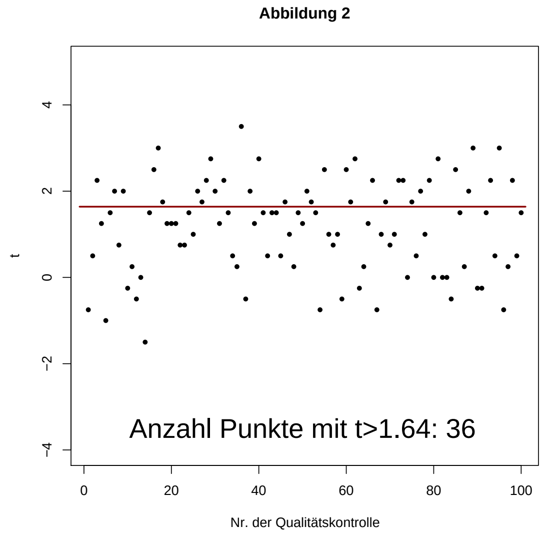
**Aufgabe**
Die Erfolgsquote $\pi$ einer Behandlungsmethode für eine Krankheit soll geschätzt werden.
(a) Der Mindeststichprobenumfang für ein approximatives 0.98-Konfidenzintervall der Länge 0.05 liegt in

**A40:** (A) $[0, 500]$. (B) $(500, 1000]$. (C) $(1000, 2000]$. (D) $(2000, \infty)$.

(b) Die Anwendung der Behandlungsmethode auf 100 Patienten ergab 73 Heilungen. Das 0.95-Konfidenzintervall für $\pi$ enthält

**A41:** (A) 0.62 und 0.83. (B) 0.60 und 0.76. (C) 0.63 und 0.77. (D) 0.66 und 0.80.




**Aufgabe**
$\pi$ sei ein Parameter, der nur Werte in [0,1] annimmt. Testproblem 1 (TP1) sei

$$H_0 : \pi \leq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi > 0.6$$

und Testproblem 2 (TP2) sei

$$H_0 : \pi = 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi \neq 0.6.$$

Mit $g(\pi) = P_\pi$(„Test lehnt $H_0$ ab“) bezeichnen wir die Gütefunktion eines Tests. Die grafische Darstellung einer Gütefunktion für einen speziellen Test finden Sie in Abbildung 1. Der Test ist ein 0.2-Niveau-Test für

**A42:** (A) TP1 und TP2. (B) TP1, aber nicht TP2. (C) TP2, aber nicht TP1.
(D) weder TP1 noch TP2.

**Aufgabe**
$\pi$ sei die Ausschussquote bei einer Qualitätskontrolle. Mit einem approximativen Binomialtest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ werde des Testproblem $H_0 : \pi \leq 0.2$ gegen $H_1 : \pi > 0.2$ untersucht. Dazu wurden 100 Qualitätskontrollen bei einer bekannten Ausschussquote von 0.25 simuliert. Abbildung 2 stellt die ermittelten Werte t der zugehörigen Teststatistik dar. Dann ist 0.36 ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

**A43:** (A) für den Fehler 1.Art. (B) eine richtige Entscheidung zu fällen.
(C) für den Fehler 2.Art.

**Aufgabe**
Für normalverteilte Daten mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 6.25$ soll folgendes Testproblem für den Erwartungswert $\mu$ untersucht werden: $H_0 : \mu = 10$ gegen $H_1 : \mu \neq 10$. Aus einer Stichprobe vom Umfang 25 wurde der Mittelwert $\bar{x} = 11.2$ ermittelt.
(a) Der Wert der Teststatistik liegt in

**A44:** (A) $(-\infty, 2.25]$. (B) $(2.25, 2.35]$. (C) $(2.35, 2.45]$. (D) $(2.45, \infty)$.

(b) Der p-Wert liegt in

**A45:** (A) $[0, 0.011]$. (B) $(0.011, 0.013]$. (C) $(0.013, 0.015]$. (D) $(0.015, 1]$.

**Aufgabe**
Für eine Nullhypothese $H_0$ und eine Alternative $H_1$ wurde ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ konstruiert.
Die Aussage „Wenn die Nullhypothese vorliegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, eine richtige Entscheidung zu treffen, stets größer oder gleich $1 - \alpha$." ist

**A46:** (A) stets richtig. (B) nicht stets richtig.

**Aufgabe**
Das Waschmittel „Wow" besaß im Januar 2011 einen Bekanntheitsgrad von 30 Prozent. Nach Einführung einer neuen Verpackungsform für „Wow" vermutet der Hersteller, dass der Bekanntheitsgrad $\pi$ im September auf über 36% gestiegen ist. Ein Marktforschungsinstitut befragt im Auftrag des Herstellers 400 zufällig ausgewählte Konsumenten, von denen 186 das Waschmittel „Wow" kennen. Mit einem statistischen Test zum Signifikanzniveau 0.0082, möchte der Hersteller zeigen, dass seine Vermutung stimmt.
Die Nullhypothese des Testproblems ist

**A47:** (A) $\pi \geq 0.36$. (B) $\pi \leq 0.36$. (C) $\pi = 0.36$. (D) $\pi \neq 0.36$.

Der Wert der Prüfgröße liegt in

**A48:** (A) $(-\infty, 4.5)$. (B) $[4.5, 4.8)$. (C) $[4.8, 5.1)$. (D) $[5.1, \infty)$.

Die Vermutung des Herstellers wird

**A49:** (A) nicht bestätigt. (B) bestätigt.

**Aufgabe**
Ein Hersteller von Rennrädern untersucht Fahrradketten der Fabrikate I und II auf ihre Laufleistung. Der Hersteller vermutet, dass die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat I länger als die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat II ist. Diese Vermutung soll mit einem Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.025$ bestätigt werden. Der Hersteller sammelt folgende Daten:

| | Fabrikat I (X) | Fabrikat II (Y) |
|---|---|---|
| Stichprobenumfang | 50 | 72 |
| Stichprobenmittel (in km) | 2155 | 2000 |
| Stichprobenvarianz (in km$^2$) | 90 000 | 129 600 |

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A50:** (A) $(-\infty, 2.50)$. (B) $[2.50, 2.55)$. (C) $[2.55, 2.60)$. (D) $[2.60, \infty)$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A51:** (A) $(-\infty, -1.53)$. (B) $[-1.53, 1.73)$. (C) $[1.73, 1.93)$. (D) $[1.93, \infty)$.

Die Testentscheidung lautet, dass Fahrradketten des Fabrikats I im Durchschnitt

**A52:** (A) länger laufen (B) nicht länger laufen

als die Ketten des Fabrikats II.

**Aufgabe**
Eine Fabrik produziert einen Artikel in zwei Produktionslinien, A und B. Eine Stichprobe von 250 Artikeln von Linie A ergab 14 Artikel mit Defekten; eine Stichprobe von 350 Artikeln von Linie B ergab 35 defekte Artikel. Man überprüfe mit einem geeigneten Test zum Niveau 0.05, ob die Aussschussquoten beider Produktionslinien gleich groß sind.
(a) Der *Betrag* des Wertes der Teststatistik liegt in

**A53:** (A) $[0, 1.70)$. (B) $[1.70, 1.90)$. (C) $[1.90, 2.10)$. (D) $[2.10, \infty)$.

(b) Die Aussage „Die Aussschussquoten beider Produktionslinien sind gleich groß.“ wird

**A54:** (A) nicht bestätigt. (B) bestätigt.

**Aufgabe**
Für zwei Merkmale X und Y sind folgende Zahlenpaare beobachtet worden:

$$(3,5), \quad (1,3), \quad (4,6), \quad (2,4), \quad (5,7).$$

Dann gilt für den empirischen Korrelationskoeffizienten $r_{XY}$:

**A55:** (A) $r_{XY} = -1$. (B) $r_{XY} \in (-1, 0]$. (C) $r_{XY} \in (0, 1)$. (D) $r_{XY} = 1$.

**Aufgabe**
Gegeben sei das Standardmodell der linearen Einfachregression

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ bezeichnen die Schätzer für $\alpha$ und $\beta$. Aus einer konkreten Stichprobe wurden die Schätzewerte 5.2 bzw. 2.1 für $\alpha$ bzw. $\beta$ bestimmt. Dann gilt

**A56:** (A) $E(\hat{\beta}) = \beta$. (B) $E(\hat{\beta}) = 5.2$. (C) $E(\hat{\beta}) = 2.1$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
Eine Zeitschrift unterstellt für den Zusammenhang zwischen Werbeausgaben und der Anzahl der neuen Abonnenten in einer Periode i das einfache lineare Regressionsmodell

$$A_i = \alpha + \beta w_i + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, n, \quad n = 20.$$

Dabei bedeutet $w_i$ die eingesetzten Werbeausgaben [in 1000 Euro] und $A_i$ die Anzahl der neuen Abonnenten [in 1000] in Periode i. Es gelte $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Man vermutet, dass bei steigenden Werbeausgaben die Anzahl der neuen Abonnenten im Mittel zunimmt. Diese Vermutung soll mit einem geeigneten statistischen Test bestätigt werden (Signifikanzniveau 0.01).
Die Auswertung ergab für n=20 Paare von Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 2, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 26, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 96, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i = 4.$$

Das Bestimmtheitsmaß liegt in

**A57:** (A) $[0, 0.025)$. (B) $[0.025, 0.035)$. (C) $[0.035, 0.045)$. (D) $[0.045, \infty)$.

Die Nullhypothese lautet

**A58:** (A) $H_0 : \beta \leq 0$. (B) $H_0 : \beta = 0$. (C) $H_0 : \beta \geq 0$. (D) $H_0 : \beta \neq 0$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A59:** (A) $(-\infty, 2.35)$. (B) $[2.35, 2.45)$. (C) $[2.45, 2.55)$. (D) $[2.55, \infty)$.

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A60:** (A) $(-\infty, 0.70)$. (B) $[0.70, 0.80)$. (C) $[0.80, 0.90)$. (D) $[0.90, \infty)$.

Dr. Ingo Steinke

Universität Mannheim
Lehrstuhl für Statistik

# Klausur zur Veranstaltung Grundlagen der Statistik

**FSS 2012, 1. Termin, 11. Juni 2012**
**Version: D**

Die Klausur besteht aus einem losen Lösungsbogen, einem gehefteten Teil und einer Formelsammlung. Vergleichen Sie die Version von Lösungsbogen und geheftetem Teil.
Der geheftete Teil mit 10 Seiten besteht aus diesem Deckblatt und Aufgabenzetteln mit **60** Aufgaben. Überprüfen Sie bitte Ihr Exemplar auf Vollständigkeit!

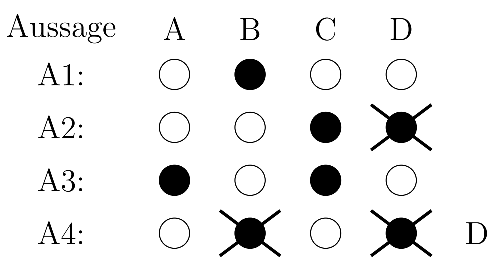
Zu jeder Aufgabe sind zwei bis vier Antworten angegeben. Von den Antwortmöglichkeiten (A) bis (D) ist genau eine richtig. Ermitteln Sie dazu die Werte, auf deren Grundlage Sie Ihre Entscheidung treffen, möglichst genau. Markieren Sie Ihre Antwort bitte auf dem Lösungsbogen. Am Ende der Klausur ist nur der **unterschriebene Lösungsbogen** abzugeben.

Unbearbeitete Aussagen, d.h. wenn keine Option markiert wurde, oder undeutliche oder unmögliche Angaben zu einer Aufgabe werden mit 0 Punkten bewertet.
Korrekt bearbeitete Aufgaben werden mit 1 Punkt, nicht korrekt bearbeitete mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl ergibt sich durch Addition aller Punkte.

Für Ihre Auswahl müssen Sie die passenden Kreise auf dem Lösungsbogen ausmalen. Bei einer ungewollten Auswahl streichen Sie den nicht korrekt markierten Kreis mit einem X durch.

Illustrierende Beispiele:

Lösungsbogen




Sie denken Aussage ...

- A1: B ist richtig.
- A2: C ist richtig, zuerst wurde D markiert.
- A3: A *oder* C ist richtig. Kein Punkt.
- A4: D ist richtig. Zuerst wurde D, dann aber B markiert.

In der Klausur werden 60 Punkte vergeben. Ab einer Punktzahl von 32 Punkten gilt die Klausur auf jeden Fall als bestanden. Die Bestehensquote wird auf minimal 60% begrenzt, d.h die Durchfallquote beträgt maximal 40%.

Die Bearbeitungszeit beträgt **180** Minuten.

Als Hilfsmittel ist nur ein nicht-programmierbarer Taschenrechner zugelassen.

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe**
Ein Investor möchte in 5 verschiedene Aktien einer Branche investieren. Er hat schon eine Vorauswahl von 13 Aktien vorgenommen. Sein Kapital möchte er dabei gemäß der Aufteilung 30%, 20%, 20%, 15%, 15% investieren.
Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, das Geld zu investieren, liegt in

**A1:** (A) $[0, 40\,000]$. (B) $(40\,000, 80\,000]$. (C) $(80\,000, 120\,000]$. (D) $(120\,000, \infty)$.

**Aufgabe**
Für die Beziehung zwischen zwei Ereignissen lässt sich folgendes formulieren: Wenn Ereignis B eintritt, dann tritt Ereignis A *nicht* ein. Welche der folgenden Beziehungen gilt dann stets:

**A2:** (A) $A \cap \bar{B} = \emptyset$. (B) $\bar{A} \cap B = \emptyset$. (C) $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$. (D) $A \cap B = \emptyset$.

**Aufgabe**
Eine Buchhandlung hat 13 verschiedene Kochbücher vorrätig, von denen 6 nur vegetarische Rezepte enthalten. Egon wählt 2 verschiedene Kochbücher zufällig aus.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens ein Kochbuch mit nur vegetarischen Rezepten auswählt, liegt in

**A3:** (A) $[0, 0.66]$. (B) $(0.66, 0.76]$. (C) $(0.76, 0.86]$. (D) $(0.86, 1]$.

**Aufgabe**
Für die Ereignisse A und B sei folgendes bekannt: $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$. Dann ist $P(B\,|A)$ in

**A4:** (A) $[0, 0.15]$. (B) $(0.15, 0.20]$. (C) $(0.20, 0.25]$. (D) $(0.25, 1]$.

**Aufgabe**
$A$ und $B$ seien Ereignisse mit $0 < P(A), P(B) < 1$ zu einem Ergebnisraum $\Omega$.
(a) Es sei $P(A \cap B) = 0$. Dann ist die Aussage $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**A5:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) A und B bilden eine disjunkte Zerlegung von $\Omega$. Dann gilt stets

**A6:** (A) $A \cup B = \emptyset$. (B) $A \cup B = \Omega$. (C) $A \cup B = A$. (D) $A \cup B = B$.

**Aufgabe**
Zur Feststellung einer Krankheit $K$ werde ein Test $A$ durchgeführt. Wenn ein Patient krank ist, dann liefert der Test mit Wahrscheinlichkeit 0.9 ein positives Ergebnis. Wenn der Patient gesund ist, zeigt der Test immer noch mit Wahrscheinlichkeit 0.05 ein positives Resultat. Es wird davon ausgegangen, dass 3% der untersuchten Personen tatsächlich an der Krankheit $K$ leiden. Für eine zufällig ausgewählte Person liegt die Wahrscheinlichkeit
(a) für ein positives Ergebnis des Tests in

**A7:** (A) $[0, 0.077]$. (B) $(0.077, 0.0.080]$. (C) $(0.080, 0.083]$. (D) $(0.083, 1]$.

(b) nicht krank zu sein, wenn der Test ein positives Ergebnis anzeigt, in

**A8:** (A) $[0, 0.63]$. (B) $(0.63, 0.66]$. (C) $(0.66, 0.69]$. (D) $(0.69, 1]$.

**Aufgabe**
In der Gruppenphase eines Fußballturniers muss eine Mannschaft gegen drei andere Mannschaften antreten, wobei aus historischer Erfahrung davon ausgegangen wird, dass sie die Mannschaften mit Wahrscheinlichkeit 0.9, 0.6 bzw. 0.5 unabhängig von einander besiegen kann.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft, mindestens zwei der drei Spiele gewinnt, liegt in

**A9:** (A) $[0, 0.70]$. (B) $(0.70, 0.74]$. (C) $(0.74, 0.78]$. (D) $(0.78, 1]$.

**Aufgabe**
F sei die Verteilungsfunktion und f die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsvariable X mit Träger $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, $m \geq 2$.
(a) Es gilt $P(a_1 \leq X \leq a_2) = F(a_2) - F(a_1)$. Die Aussage ist

**A10:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

(b) F ist stetig. Die Aussage ist

**A11:** (A) stets wahr. (B) weder stets wahr noch stets falsch. (C) stets falsch.

**Aufgabe**
Es werde wiederholt ein idealer Würfel geworfen. X gebe an, wie viele Würfe notwendig waren, bis das erste Mal eine *Fünf* oder *Sechs* geworfen wurde. Für die Wurfergebnisse 1,4,6,5,... wäre z.B. X=3.
(a) Der Träger von $X$ ist

**A12:** (A) $\mathbb{R}$. (B) $[1, \infty)$. (C) $\{1, 2, \ldots, 6\}$. (D) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

(b) $P(X = 3)$ liegt in

**A13:** (A) $[0, 0.10]$. (B) $(0.10, 0.13]$. (C) $(0.13, 0.16]$. (D) $(0.16, 1]$.

**Aufgabe**
Die Zufallsvariable X sei diskret verteilt gemäß Wahrscheinlichkeitstabelle

| x | -2 | -1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P(X=x) | 0.3 | 0.1 | 0.4 | 0.2 |

(a) $P(0 \leq X \leq 3)$ liegt in

**A14:** (A) $[0, 0.35]$. (B) $(0.35, 0.45]$. (C) $(0.45, 0.55]$. (D) $(0.55, 1\,]$.

(b) Die Varianz von X ist in

**A15:** (A) $[0, 3.5]$. (B) $(3.5, 3.7]$. (C) $(3.7, 3.9]$. (D) $(3.9, \infty)$.

**Aufgabe**
Die diskrete Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = 0.3I_{[-2,1)}(x) + 0.6I_{[1,2)}(x) + I_{[2,\infty)}(x).$$

Der Erwartungswert von X liegt in

**A16:** (A) $(-\infty, 0.40]$. (B) $(0.40, 0.50]$. (C) $(0.50, 0.60]$. (D) $(0.60, \infty)$.

**Aufgabe**
$X$ sei stetig verteilt mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^3\, I_{(0,1]}(x) + \frac{7}{16}\, I_{(1,3)}(x).$$

(a) F(2.5) liegt in

**A17:** (A) [0,0.72). (B) [0.72,0.76]. (C) (0.76,0.80). (D) [0.80,1].

(b) $E(X)$ ist in

**A18:** (A) (-∞,1.70 ]. (B) (1.70,1.80 ]. (C) (1.80,1.90 ]. (D) (1.90,∞).

(c) Das 0.8-Quantil zu X liegt im Intervall

**A19:** (A) (-∞,2.46]. (B) (2.46,2.51]. (C) (2.51,2.56]. (D) (2.56,∞).

**Aufgabe**
Der monatliche Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts wird als Zufallsvariable aufgefasst und betrage im Mittel 140 (alle Angaben in kWh) bei einer Standardabweichung 30. Der Energieverbrauch der verschiedenen Monate eines Jahres mögen sich nicht beeinflussen.
(a) Der Erwartungswert des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A20:** (A) $(-\infty, 1750]$ (B) $(1750, 1900]$. (C) $(1900, 2150]$. (D) $(2150, \infty)$.

(b) Die Varianz des jährlichen Stromverbrauchs des Haushalts liegt in

**A21:** (A) $[0, 6000]$. (B) $(6000, 8000]$. (C) $(8000, 10\,000]$. (D) $(10\,000, \infty)$.

**Aufgabe**
$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \sigma^2$.
Welche der Aussagen ist *falsch*!

**A22:** (A) $E(\sum_{i=1}^n X_i^2) = n \cdot \mu^2$. (B) $E(X_i - \mu)^2 = \sigma^2$. (C) $Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i) = \sigma^2/n$.

**Aufgabe**
Bei der Lotterie „7 aus 37“ kreuzt man auf dem Tippschein 7 aus 37 möglichen Zahlen an. Bei der Ziehung der Lotterie werden dann 7 aus den 37 Zahlen ohne Zurücklegen gezogen. Wir gehen davon aus, dass 9 000 000 Tippscheine zufällig und unabhängig voneinander ausgefüllt werden. Die Anzahl der Tippscheine, auf denen alle Zahlen richtig angekreuzt wurden, ist dann approximativ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda$ in

**A23:** (A) $(0, 0.86]$. (B) $(0.86, 0.89]$. (C) $(0.89, 0.92]$. (D) $(0.92, \infty)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass auf mindestens zwei Tippscheinen alle Zahlen richtig getippt wurden, liegt in

**A24:** (A) $(0, 0.23]$. (B) $(0.23, 0.25]$. (C) $(0.25, 0.27]$. (D) $(0.27, 1]$.

**Aufgabe**
Beim Ausspielen eines Würfels trete die Augenzahl ,1' mit Wahrscheinlichkeit 0.2 auf.
Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 6-maligen Ausspielen des Würfels genau 4 Mal die Augenzahl ,1' auftritt, liegt in

**A25:** (A) $[0, 0.010]$. (B) $(0.010, 0.012]$. (C) $(0.012, 0.014]$. (D) $(0.014, 1]$.

**Aufgabe**
X sei standardnormalverteilt. Es gelte $P(a \leq 2X + 3 \leq 6) = 0.3$.
$a$ liegt in

**A26:** (A) $(-\infty, 3.5]$. (B) $(3.5, 3.8]$. (C) $(3.8, 4.1]$. (D) $(4.1, \infty)$.

**Aufgabe**
Der Energieverbrauch eines 1-Personenhaushalts sei normalverteilt mit Erwartungswert 1200 (alle Angaben in kWh) und Standardabweichung 300. Für eine kWh sind beim Stromanbieter 22 Cent zu bezahlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass für den Stromverbrauch höchstens 300 Euro zu bezahlen sind, liegt in

**A27:** (A) $[0, 0.73]$. (B) $(0.73, 0.76]$. (C) $(0.76, 0.79]$. (D) $(0.79, 1]$.

**Aufgabe**
Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsvariable X und Y sei

| $x_i \setminus y_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.2 | 0.2 |
| 1 | 0.3 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0 | 0.1 | 0.1 |

(a) $P(|X - Y| \leq 1)$ liegt in

**A28:** (A) $[0, 0.55]$. (B) $(0.55, 0.65]$. (C) $(0.65, 0.75]$. (D) $(0.75, 1]$.

(b) Cov(X,Y) ist in

**A29:** (A) $(-\infty, -0.25]$. (B) $(-0.25, -0.15]$. (C) $(-0.15, -0.05]$. (D) $(-0.05, \infty)$.

(c) $E(X|Y = 1)$ ist in

**A30:** (A) $(-\infty, 0.45]$. (B) $(0.45, 0.55]$. (C) $(0.55, 0.65]$. (D) $(0.65, \infty)$.

**Aufgabe**
Der zweidimensionale Zufallsvektor $(X, Y)$ sei stetig verteilt mit Dichtefunktion

$$f(x, y) = c \cdot x^2 \cdot (1 + y^2) I_{[1,3]}(x) I_{[-1,1]}(y).$$

$c$ liegt im Intervall

**A31:** (A) $[0, 0.039]$. (B) $(0.039, 0.042]$. (C) $(0.042, 0.045]$. (D) $(0.045, \infty)$.

**Aufgabe**

Die Renditen X und Y zweier Aktien, $A_X$ und $A_Y$, seien normalverteilt (alle Angaben in Prozent): $X \sim N(7, 6.25)$ und $Y \sim N(2, 2.25)$. Der Korrelationskoeffizient zwischen X und Y betrage -0.6. Ein Investor möchte 60% seines Geldes in Aktie $A_X$ und den Rest in $A_Y$ investieren.
(a) Die erwartete Rendite des Investment liegt in

**A32:** (A) $(-\infty, 4.7]$. (B) $(4.7, 4.9]$. (C) $(4.9, 5.1]$. (D) $(5.1, \infty)$.

(b) Die Standardabweichung des Investments liegt in

**A33:** (A) $[0, 1.30]$. (B) $(1.30, 1.50]$. (C) $(1.50, 1.70]$. (D) $(1.70, \infty)$.

**Aufgabe**

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim 90 maligen Werfen eines Würfels mindestens 28 Mal eine ‚6' geworfen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit eine ‚6' zu werfen 0.3 beträgt, liegt in

**A34:** (A) $[0, 0.425]$. (B) $(0.425, 0.445]$. (C) $(0.445, 0.465]$. (D) $(0.465, 1]$.

**Aufgabe**

$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit unbekannten Erwartungswert $E(X) = \mu$ und unbekannter Varianz Var(X)=$\sigma^2 > 0$.
(a) Welcher der folgenden erwartungstreuen Schätzer für $\mu$ hat die kleinste Varianz?

**A35:** (A) $0.2X_1 + 0.2X_2 + 0.6X_3$. (B) $X_2$. (C) $0.3X_1 + 0.4X_2 + 0.3X_3$. (D) $0.5X_1 + 0.5X_2$.

(b) Ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2$ ist

**A36:** (A) $X_1^2 - \mu^2$. (B) $0.5 \cdot (X_1 - X_2)^2$. (C) $X_2^2$. (D) (A)-(C) sind falsch.

(c) Es seien

$$T_n = X_1^2, \qquad U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \qquad V_n = \big(\frac{1}{n} + X_1\big) \cdot \big(\frac{1}{n} + X_n\big).$$

Von diesen drei Folgen von Zufallsvariablen sind $a$ Folgen ($a \in \{0, \ldots, 3\}$) konsistente Schätzer für den Parameter $\theta = \mu^2$. $a$ ist gleich

**A37:** (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

**Aufgabe**

Es seien $X_1, \ldots, X_n \sim U(\theta, 2\theta)$ u.i.v mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Der Momentenschätzer für den Parameter $\theta$ ist

**A38:** (A) $2\bar{X}_n$. (B) $2\bar{X}_n/3$. (C) $3\bar{X}_n/2$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**

$X_1, \ldots, X_n$ seien u.i.v. mit $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ und unbekannten Parametern. Eine Stichprobe vom Umfang 25 liefert das Stichprobenmittel $\bar{x} = 140$ und die Stichprobenvarianz $s^2 = 100$.
Die obere Grenze des 0.95-Konfidenzintervalls für $\mu$ liegt in

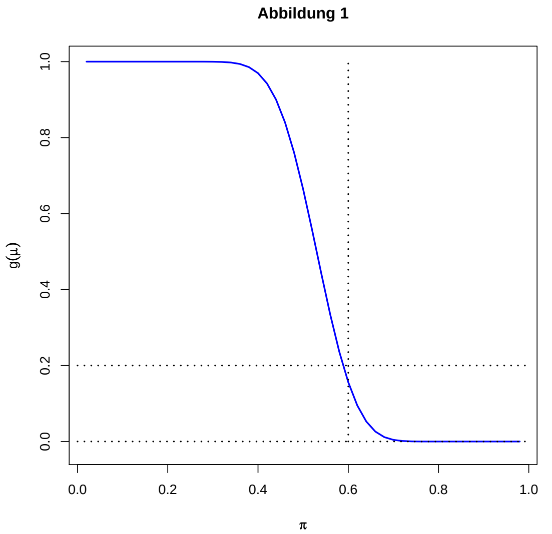
**A39:** (A) $(-\infty, 143.65]$. (B) $(143.65, 143.85]$. (C) $(143.85, 144.05]$. (D) $(144.05, \infty)$.

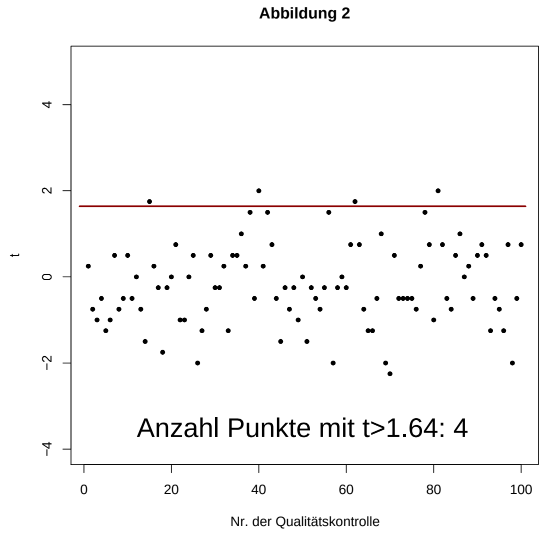
**Aufgabe**
Die Erfolgsquote $\pi$ einer Behandlungsmethode für eine Krankheit soll geschätzt werden.
(a) Der Mindeststichprobenumfang für ein approximatives 0.96-Konfidenzintervall der Länge 0.02 liegt in

**A40:** (A) $[0, 2\,500]$. (B) $(2\,500, 5\,000]$. (C) $(5\,000, 10\,000]$. (D) $(10\,000, \infty)$.

(b) Die Anwendung der Behandlungsmethode auf 100 Patienten ergab 68 Heilungen. Das 0.99-Konfidenzintervall für $\pi$ enthält

**A41:** (A) 0.76 und 0.84. (B) 0.51 und 0.74. (C) 0.54 und 0.76. (D) 0.57 und 0.78.




**Aufgabe**
$\pi$ sei ein Parameter, der nur Werte in [0,1] annimmt. Testproblem 1 (TP1) sei

$$H_0 : \pi \geq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi < 0.6$$

und Testproblem 2 (TP2) sei

$$H_0 : \pi \leq 0.6 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \pi > 0.6.$$

Mit $g(\pi) = P_\pi$(„Test lehnt $H_0$ ab“) bezeichnen wir die Gütefunktion eines Tests. Die grafische Darstellung einer Gütefunktion für einen speziellen Test finden Sie in Abbildung 1. Der Test ist ein 0.2-Niveau-Test für

**A42:** (A) TP1 und TP2. (B) TP1, aber nicht TP2. (C) TP2, aber nicht TP1. (D) weder TP1 noch TP2.

**Aufgabe**
$\pi$ sei die Ausschussquote bei einer Qualitätskontrolle. Mit einem approximativen Binomialtest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ werde des Testproblem $H_0 : \pi \leq 0.2$ gegen $H_1 : \pi > 0.2$ untersucht. Dazu wurden 100 Qualitätskontrollen bei einer bekannten Ausschussquote von 0.19 simuliert. Abbildung 2 stellt die ermittelten Werte t der zugehörigen Teststatistik dar. Dann ist 0.96 ein Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit

**A43:** (A) eine richtige Entscheidung zu fällen. (B) für den Fehler 1.Art.
(C) für den Fehler 2.Art.

**Aufgabe**
Für normalverteilte Daten mit bekannter Varianz $\sigma^2 = 2.56$ soll folgendes Testproblem für den Erwartungswert $\mu$ untersucht werden: $H_0 : \mu \leq 10$ gegen $H_1 : \mu > 10$. Aus einer Stichprobe vom Umfang 16 wurde der Mittelwert $\bar{x} = 11.2$ ermittelt.
(a) Der Wert der Teststatistik liegt in

**A44:** (A) $(-\infty, 2.5]$. (B) $(2.5, 2.7]$. (C) $(2.7, 2.9]$. (D) $(2.9, \infty)$.

(b) Der p-Wert liegt in

**A45:** (A) $[0, 0.0010]$. (B) $(0.0010, 0.0015]$. (C) $(0.0015, 0.0020]$. (D) $(0.0020, 1]$.

**Aufgabe**
Für eine Nullhypothese $H_0$ und eine Alternative $H_1$ wurde ein Signifikanztest zum Signifikanzniveau $\alpha \in (0, 1)$ konstruiert.
Die Aussage „Die Wahrscheinlichkeit, eine Fehlentscheidung zu treffen, ist stets kleiner oder gleich $\alpha$.“ ist

**A46:** (A) stets richtig. (B) nicht stets richtig.

**Aufgabe**
Das Waschmittel „Wow“ besaß im Januar 2011 einen Bekanntheitsgrad von 30 Prozent. Nach Einführung einer neuen Verpackungsform für „Wow“ vermutet der Hersteller, dass der Bekanntheitsgrad $\pi$ im September auf über 40% gestiegen ist. Ein Marktforschungsinstitut befragt im Auftrag des Herstellers 500 zufällig ausgewählte Konsumenten, von denen 220 das Waschmittel „Wow“ kennen. Mit einem statistischen Test zum Signifikanzniveau 0.0228, möchte der Hersteller zeigen, dass seine Vermutung stimmt.
Die Nullhypothese des Testproblems ist

**A47:** (A) $\pi = 0.40$. (B) $\pi \leq 0.40$. (C) $\pi \geq 0.40$. (D) $\pi \neq 0.40$.

Der Wert der Prüfgröße liegt in

**A48:** (A) $(-\infty, 1.8)$. (B) $[1.8, 2.1)$. (C) $[2.1, 2.4)$. (D) $[2.4, \infty)$.

Die Vermutung des Herstellers wird

**A49:** (A) nicht bestätigt. (B) bestätigt.

**Aufgabe**
Ein Hersteller von Rennrädern untersucht Fahrradketten der Fabrikate I und II auf ihre Laufleistung. Der Hersteller vermutet, dass die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat I länger als die durchschnittliche Laufleistung der Ketten von Fabrikat II ist. Diese Vermutung soll mit einem Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$ bestätigt werden. Der Hersteller sammelt folgende Daten:

| | Fabrikat I (X) | Fabrikat II (Y) |
|---|---|---|
| Stichprobenumfang | 60 | 82 |
| Stichprobenmittel (in km) | 2255 | 2100 |
| Stichprobenvarianz (in km$^2$) | 90 000 | 109 600 |

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A50:** (A) $(-\infty, 2.85)$. (B) $[2.85, 2.95)$. (C) $[2.95, 3.05)$. (D) $[3.05, \infty)$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A51:** (A) $(-\infty, 2.00)$. (B) $[2.00, 2.15)$. (C) $[2.15, 2.30)$. (D) $[2.30, \infty)$.

Die Testentscheidung lautet, dass Fahrradketten des Fabrikats I im Durchschnitt

**A52:** (A) länger laufen (B) nicht länger laufen

als die Ketten des Fabrikats II.

**Aufgabe**
Eine Fabrik produziert einen Artikel in zwei Produktionslinien, A und B. Eine Stichprobe von 300 Artikeln von Linie A ergab 16 Artikel mit Defekten; eine Stichprobe von 400 Artikeln von Linie B ergab 38 defekte Artikel. Es soll mit einem geeigneten Test zum Niveau 0.05 gezeigt werden, dass die Ausschussquote von Linie B größer als von Linie A ist.
(a) Der *Betrag* des Wertes der Teststatistik liegt in

**A53:** (A) $(-\infty, 1.6)$. (B) $[1.6, 1.8)$. (C) $[1.8, 2.0)$. (D) $[2.0, \infty)$.

(b) Die Aussage „Die Aussschussquote von Linie B ist größer als von Linie A.“ wird

**A54:** (A) nicht bestätigt. (B) bestätigt.

**Aufgabe**
Für zwei Merkmale X und Y sind folgende Zahlenpaare beobachtet worden:

$$(3, 5), \quad (1, 7), \quad (4, 5), \quad (2, 6), \quad (5, 3).$$

Dann gilt für den empirischen Korrelationskoeffizienten $r_{XY}$:

**A55:** (A) $r_{XY} = -1$. (B) $r_{XY} \in (-1, 0]$. (C) $r_{XY} \in (0, 1)$. (D) $r_{XY} = 1$.

**Aufgabe**
Gegeben sei das Standardmodell der linearen Einfachregression

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ bezeichnen die Schätzer für $\alpha$ und $\beta$. Aus einer konkreten Stichprobe wurden die Schätzewerte 5.2 bzw. 2.1 für $\alpha$ bzw. $\beta$ bestimmt. Dann gilt

**A56:** (A) $E(\hat{\alpha}) = 5.2$. (B) $E(\hat{\alpha}) = 2.1$. (C) $E(\hat{\alpha}) = \alpha$. (D) (A)-(C) sind falsch.

**Aufgabe**
Eine Zeitschrift unterstellt für den Zusammenhang zwischen Werbeausgaben und der Anzahl der neuen Abonnenten in einer Periode i das einfache lineare Regressionsmodell

$$A_i = \alpha + \beta w_i + \varepsilon_i, \ i = 1, \ldots, n, \quad n = 15.$$

Dabei bedeutet $w_i$ die eingesetzten Werbeausgaben [in 1000 Euro] und $A_i$ die Anzahl der neuen Abonnenten [in 1000] in Periode i. Es gelte $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ u.i.v.

Man vermutet, dass bei steigenden Werbeausgaben die Anzahl der neuen Abonnenten im Mittel zunimmt. Diese Vermutung soll mit einem geeigneten statistischen Test bestätigt werden (Signifikanzniveau 0.01).
Die Auswertung ergab für n=15 Paare von Beobachtungen

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 23, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 69, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot a_i = 3.$$

Das Bestimmtheitsmaß liegt in

**A57:** (A) $[0, 0.055)$. (B) $[0.055, 0.060)$. (C) $[0.060, 0.065)$. (D) $[0.065, \infty)$.

Die Nullhypothese lautet

**A58:** (A) $H_0 : \beta \leq 0$. (B) $H_0 : \beta \geq 0$. (C) $H_0 : \beta = 0$. (D) $H_0 : \beta \neq 0$.

Der kritische Wert des Tests liegt in

**A59:** (A) $(-\infty, 2.44)$. (B) $[2.44, 2.64)$. (C) $[2.64, 2.84)$. (D) $[2.84, \infty)$.

Der Wert der Teststatistik liegt in

**A60:** (A) $(-\infty, 0.73)$. (B) $[0.73, 0.83)$. (C) $[0.83, 0.93)$. (D) $[0.93, \infty)$.