Finanzmathematik Klausurblatt (inoffiziell)

Ohne Gewähr

1. Grundlagen

$r :=$ Zinssatz	$p :=$ Zinsfuß	$q = (1+r) :=$ Zinsfaktor	$u :=$ nominaler Zinssatz	$\frac{u}{m} :=$ Unterjähriger Zinssatz

Exponentielle Verzinsung:	$K_t = K_0 \cdot (1+r)^t$
Lineare Verzinsung:	$K_t = K_0 \cdot (1 + r \cdot t)$
Unterjährige (exponentielle) Verzinsung:	$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{mt} \Leftrightarrow r_{eff} = \left(1 + \frac{u}{m}\right)^{m} - 1$
Kontinuierliche Verzinsung:	$K_t = e^{ut} \Leftrightarrow r_{eff} = e^{u} - 1 \Leftrightarrow u = \ln(1+r)$
(Gesamt-)tage Konvention 30/360	$(Tag\ T_2 - Tag\ T_1) + 30 \cdot (Monat\ T_2 - Monat\ T_1) + 360 \cdot (Jahre\ T_2 - Jahre\ T_1)$
Taggenaue Zinsberechnung	$K_\tau = K_0 \cdot (1+r)^\tau$, mit $\tau = \frac{x}{360}$ (Konvention 30/360)
Gemischte Verzinsung	$K_\tau = K_0 \cdot (1 + r \cdot \tau_1) \cdot (1+r)^t \cdot (1 + r \cdot \tau)$ (Jahresbruchteile linear, vollständige Jahre geometrisch)

Bewertung von Zahlungsströmen

Barwert	$K_0(z_t, r) = K_0 \cdot q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} z_t \cdot q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{z_t}{(1+r)^t}$
Endwert	$K_T(z_t, r) = K_0 \cdot q^{t} = \sum_{t=0}^{T} z_t \cdot q^{T-t} = \sum_{t=0}^{T} z_t \cdot (1+r)^{T-t}$
Kapitalwert	$K_0\left(z_{t_i}, r\right) = -az_0 + \sum_{i=1}^{n} z(t_i) \cdot (1+r)^{-t_i}$, $-az_0 < 0$

2. Renten und Tilgungsrechnung

Rentenrechnung	Barwert $\underset{q^{-T}}{\overset{q^T}{\rightleftarrows}}$	Endwert
Nachschüssige Rente	$R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^T}$	$R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1}$
Vorschüssige Rente	$R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^T} \cdot q$	$R \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot q$
(Nachschüssige) Dynamische Rente (mit Wachstumsfaktor $c = 1 + g$)	$R \cdot \frac{q^T - c^T}{q - c} \cdot \frac{1}{q^T}$	$R \cdot \frac{q^T - c^T}{q - c}$
Unterjährige Rente (m Zahlungen pro Jahr)	$R \cdot \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1} \cdot \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}}$	$R \cdot \frac{q^{\frac{T}{m}} - 1}{q^{\frac{1}{m}} - 1}$
Unterjährige dynamische Rente (mit Wachstumsfaktor $c = 1 + g$)	$R \cdot \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}} \cdot \frac{1}{q^{\frac{T}{m}}}$	$R \cdot \frac{q^{\frac{T}{m}} - c^{\frac{T}{m}}}{q^{\frac{1}{m}} - c^{\frac{1}{m}}}$
Ewige Rente	$\frac{R}{r}$	
Ewige Rente (mit Wachstumsrate g)	$\frac{R}{r - g}$	

Tilgungsrechnung	Nachschüssig	Vorschüssig
Schuldbetrag S_0	$S_0 = A \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^T}$	$S_0 = A \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \frac{q}{q^T}$
Annuität $A_t = Z_t + T_t$	$A = S_0 \cdot \frac{q - 1}{q^T - 1} \cdot q^T$	$A = S_0 \cdot \frac{q - 1}{q^T - 1} \cdot \frac{q^T}{q}$
Restschuld am Ende der Periode t $RS_t = RS_{t-1} - T_t$	$RS_t = S_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$	$RS_t = S_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \cdot q$
Zinsanteil $Z_t = A_t - T_t$	$Z_t = (RS_{t-1}) \cdot r = S_0 \frac{(q^T - q^{t-1})}{q^T - 1} \cdot (q - 1)$	
Tilgungsanteil $T_t = A_t - Z_t$	$S_0 \cdot \frac{q^{t-1} \cdot (q - 1)}{q^T - 1}$	
Kreditlaufzeit	$T_{ns} = \frac{\ln(A) - \ln(A - S_0 \cdot r)}{\ln(q)}$	$T_{vs} = \frac{\ln(A \cdot q) - \ln(A \cdot q - S_0 \cdot r)}{\ln(q)}$

3. Kurs- und Renditerechnung

Kursrechnung	
Fairer Preis/Kurs P_0	$P_0(r) = \sum_{t=1}^{T} z_t \cdot \frac{1}{(1+r)^t} = z_t \cdot q^{-t}$
Standardbond	$P_0(r) = z \cdot \frac{q^T - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^T} + \frac{N}{q^T}$
Zerobond	$P_0(r) = \frac{N}{q^T}$
Aktienanleihe (mit Wachstumsfaktor g) nach Dividendendiskontierungsmodell	$P_0(r) = \frac{D_1}{r - g}$
Renditerechnung	
Einperiodige Investments	$r = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} - 1$
Endfälliges Investment ($r_{arithmetisch} \geq r_{geometrisch}$)	$r_{geometrisch} = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(1 + r_t)} - 1$ $r_{arithmetisch} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^{T} r_t$
<u>Mehrperiodige Investments</u>	
Durchschnittliche Rendite	$r_0 = \frac{1}{T} \cdot \frac{(\sum_{t=1}^{T} z_t) - az_0}{az_0}$
Interner Zinsfuß	$K_0(r) = -az_0 + \sum_{t=1}^{T} z_t \cdot q_I^{-t} = 0$ (nach q_I auflösen $, pq/abc - Formel$)
Spot Rate r_I (interner Zinsfuß eines Zerobonds)	$r_I = \sqrt[t]{\frac{1}{b(0,t)}} - 1$
Modifizierter interner Zinsfuß r_B (Baldwin-Verzinsung mit Wiederanlagezins r_0)	$az_0 \cdot (1 + r_B)^T = \sum_{t=1}^{T} z_t (1 + r_0)^{T-t} = (1 + r_0)^T \cdot \sum_{t=1}^{T} z_t \cdot (1 + r_0)^{-t}$ $\Leftrightarrow r_B = (1 + r_0) \sqrt[T]{\frac{1}{az_0} \cdot \sum_{t=1}^{T} z_t (1 + r_0)^{-t}} - 1$
<u>Rendite von Fondsinvestments</u>	
Zeitgewichtete Rendite r_{ZGR} *(misst Managementleistung)*	$r_{ZGR} = \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(1 + r_t)} - 1$ $r_t = \frac{v_t}{v_{t-1} + z_{t-1}} - 1$
Kapitalgewichtete Rendite *(misst Gesamtperformance)*	$V_0 \cdot (1 + r_{KGR})^T + \sum_{t=1}^{T-1} z_t \cdot (1 + r_{KGR})^{T-t} = V_T$ $(Auflösen\ nach\ r_{KGR})$