# Tut 10 (https://goo.gl/hB4cUk)

## "Zusätzliche Zusammenfassung"

* Effektivzins: - Dieser kann mit Hilfe d. IZ errechnet werden
  - approximative Formeln:

$$r_{eff}^{\text{endfällige Tilgung}} = \frac{i_{nom} + \frac{\text{Disagio}}{\text{Laufzeit}}}{\text{Auszahlungsquote}} = \frac{i_{nom} + \frac{D}{T}}{1-D}$$

$$r_{eff}^{\text{Raten- und Annuitätentilgung}} = \frac{i_{nom} + \frac{D}{\frac{T+1}{2}}}{1-D}$$

$\Rightarrow$ ohne Disagio ist der Nominalzins auch der IZ

* Annuitätentilgung: - $A = K_0 \cdot \frac{(1+i)^T \cdot i}{(1+i)^T - 1}$
  - $A = Z_t + T_t$
  - $T_t = T_{t-1}(1+i)$

$$\Leftrightarrow \quad i = \frac{T_t}{T_{t-1}} - 1$$

  - $Z_t = K_{t-1} \cdot i$

- Beispiel:

$$T_2 = T_1(1+i)$$

$$A - Z_2 = \quad ''$$

$$A - (K_1 \cdot i) = \quad ''$$

$$A - (K_0 - T_1) \cdot i = \quad ''$$

$$A - K_0 \cdot i + T_1 \cdot i = \quad ''$$

$$A - Z_1 + T_1 \cdot i = \quad ''$$

$$T_1 + T_1 \cdot i = T_1(1+i)$$

(32) a) Auszahlungsquote = 100%

↳ gibt es keinen Disagio ist d. effektive Zinssatz gleich dem nominalen Zinssatz ($r_{eff} = i_{nom}$)

⇒ d.h. für alle 3 Alternativen ist der Effektivzinssatz $r_{eff} = i_{nom} = 10\%$

Endfällige Tilgung:

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z_t$ | | −(1 Mio · 0,1) = −100.000 | −100.000 | −100.000 | −100.000 | −100.000 |
| $T_t$ | | | | | | −1 Mio |
| $z_t$ | +1 Mio | −100.000 | −100.000 | −100.000 | −100.000 | −1,1 Mio |

Ratentilgung: $T_t = S_0/T = 1\,Mio/5 = 200.000$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $RS_{t-1}$ | | 1 Mio | 800.000 | 600.000 | 400.000 | 200.000 |
| $Z_t$ | | −100.000 | −80.000 | −60.000 | −40.000 | −20.000 |
| $T_t$ | | −200.000 | −200.000 | −200.000 | −200.000 | −200.000 |
| $z_t$ | +1 Mio | −300.000 | −280.000 | −260.000 | −240.000 | −220.000 |

Annuitätentilgung: AF =

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $RS_{t-1}$ | | 1 Mio | (4) 836.200 | 656.020 | 457.822 | 239.804,2 |
| $Z_t$ | $i \cdot RS_{t-1}$ | (2) −100.000 | −83.620 | −65.602 | −45.782,2 | −23.980,42 |
| $T_t$ | (1) − (2) | (3) −163.000 | −180.180 | −198.198 | −218.017,8 | −239.804,2 (239.819,58) |
| $z_t$ | +1 Mio | (1) −263.800 | −263.800 | −263.800 | −263.800 | −263.800 |

↳ (genaueres Ergebnis, wenn AF nicht gerundet wird:

$$A = S_0 \cdot AF = 1\,Mio \cdot \frac{1{,}1^5 \cdot 0{,}1}{1{,}1^5 - 1} = 263.797{,}48\,€)$$

b) Vgl. Google Drive Ordner

c) Die Zahlungsreihen ändern sich nicht bzw. nur bezüglich d. Auszahlung:

Auszahlungsbetrag = Nominalbetrag − Disagio

= Nominalbetrag × Auszahlungsquote

= 1.000.000 · 0,95

= 950.000 €

$$\left[\begin{array}{l} r_{eff}^{endfällig} = \dfrac{0,1 + \frac{0,05}{5}}{0,95} = 11,58\% \\ r_{eff}^{Raten/Annuität} = \dfrac{0,1 + \frac{0,05}{\frac{5+1}{2}}}{0,95} = 12,58\% \end{array}\right]$$

d) ohne Disagio entspricht d. Effektivzins wieder dem Nominalzins

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $RS_{t-1}$ | | 1 Mio | 1 Mio | 1 Mio | 1 Mio | 500' |
| $Z_t$ | | −100' | −100' | −100' | −100' | −50.000 |
| $T_t$ | | | | | −500' | −500.000 |
| $Z_t$ | +1 Mio | −100' | −100' | −100' | −600' | −550.000 |

Ratentilgung: $T_t = S_0 / T = 1\ Mio / 2 = 500.000$

Annuitätentilgung: $AF = \frac{1,1^2 \cdot 0,1}{1,1^2 - 1}$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $RS_{t-1}$ | | 1 Mio | 1 Mio | 1 Mio | 1 Mio. | (4) 523.800 |
| $Z_t$ | | −100' | −100' | −100' | (2) −100' | −52.380 |
| $T_t$ | | | | | (3) −476.200 | −523.800 (−523.820) |
| $Z_t$ | +1 Mio | −100' | −100' | −100' | (1) −576.200 | −576.200 |

(33)

| $t$ | $K_{t-1}$ | $Z_t$ | $T_t$ | $A_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (2) 5.000.000 | 362.500 | 865.127,42 | (1) 1.227.627,42 |
| 2 | (3) 4.134.872,58 | (4) 299.778,26 | 927.849,16 | " |
| 3 | 3.207.023,42 | 232.509,20 | 995.118,22 | " |
| 4 | 2.211.905,20 | 160.363,13 | 1.067.264,29 | " |
| 5 | 1.144.640,91 | 82.986,47 | 1.144.640,95 | " |

(5)

(1) $A = Z_t + T_t$

(2) $\cdot\ T_t = T_{t-1} \cdot (1+i)$

$\Leftrightarrow i = \frac{T_t}{T_{t-1}} - 1 = \frac{927.849,16}{865.127,42} - 1 = 0,0725$

$\cdot\ Z_t = K_{t-1} \cdot i$

$K_{t-1} = \frac{Z_t}{i} \Rightarrow K_0 = \frac{Z_1}{i} = \frac{362.500}{0,0725} = 5.000.000$

(3) $K_t = K_{t-1} - T_{t-1}$

(4) $A = Z_t + T_t$ oder $Z_t = K_{t-1} \cdot i$

$\Leftrightarrow Z_t = A - T_t$

(5) Schema anwenden

(34) a) $AF = \frac{(1+i)^T \cdot i}{(1+i)^T - 1} = \frac{1,0625^6 \cdot 0,0625}{1,0625^6 - 1} = 0,2050$

$A = 500.000 \cdot 0,2050 = 102.500$ €/Jahr

Idee: Vorzeitige Tilgung entspricht einem Investment mit Auszahlung 190.000 € & Rückflüssen von 102.500 €

$\Rightarrow Z_t = \{-190.000, 102.500, 102.500\}$

$NPV(r) \overset{!}{=} 0$

$-190.000 + \frac{102.500}{1+r} + \frac{102.500}{(1+r)^2} \overset{!}{=} 0$

$$-190.000x^2 + 102.500x + 102.500 = 0$$

$$x^2 - \frac{102.500}{190.000}x - \frac{102.500}{190.000} = 0$$

$$x^2 - 41/76\,x - 41/76 = 0$$

$$x_{1/2} = +\frac{41/76}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{41/76}{2}\right)^2 + 41/76}$$

$$x_1 = 1{,}0522 \qquad x_2 = -0{,}5127$$

$x_1 = 1+r = 1{,}0522$

$r = 0{,}0522 = 5{,}22\% < 6\% = i_{Markt}$

=> Verzinsung d. Investition ist geringer als die Marktverzinsung

=> vorzeitige Tilgung unvorteilhaft

b) $-K_0 + \frac{102.500}{1{,}06} + \frac{102.500}{1{,}06^2} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow K_0 = 187.922{,}75$ €

35

a) A: $z_t: \{ -50 \cdot 1{,}05 = -52{,}5 \;,\; 50 \cdot 0{,}1 = +5 \;,\; 50 \cdot 1{,}1 = +55 \}$

fairer Wert: $PV = \frac{5}{1{,}08} + \frac{55}{1{,}08^2} = 51{,}78 < 52{,}5$

=> ~~unter~~ überbewertet => nicht kaufen!

B: $z_t: \{ -100 \cdot 0{,}95 = -95 \;,\; 100 \cdot 0{,}07 = +7 \;,\; 100 \cdot 0{,}07 = +7 \;,\; 100 \cdot 1{,}07 = +107 \}$

$PV = \frac{7}{1{,}08} + \frac{7}{1{,}08^2} + \frac{107}{1{,}08^3} = 97{,}42 > 95$

=> unterbewertet => kaufen

C: $z_t: \{ -100 \cdot 0{,}77 = -77 \;,\; 0 \;,\; 0 \;,\; +100 \}$

$PV = \frac{100}{1{,}08^3} = 79{,}38 > 77$

=> unterbewertet => kaufen

b) A: $NPV(r) \overset{!}{=} 0$

$$-52{,}50 + \frac{5}{1+r} + \frac{55}{(1+r)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$r_{eff} = 7{,}225\,\% < 8\,\%$$

=> Investment unvorteilhaft => nicht kaufen!

B: Anleihe B entspricht einem endfälligen Kredit mit Nominalzins 7% & Disagio 5%

$$r_{eff}^{endfällig} = \frac{0{,}07 + \frac{0{,}05}{3}}{0{,}95} = 9{,}12\,\% > 8\,\%$$

=> vorteilhaft => kaufen

C: $K_T = K_0 (1+r)^T$

$$r_{eff} = \sqrt[T]{\frac{K_T}{K_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{100}{77}} - 1 = 9{,}1\,\% > 8\,\%$$

=> vorteilhaft => kaufen

c) • selbe Ergebnisse für a) & b)

• Grund: Bei Vorteilhaftigkeitsentscheidungen kommen NPV-Methode & IZ zum selben Ergebnis (problematisch nur bei Wahlentscheidungen)