

**Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,  
Portfolio Management und Versicherungswirtschaft**

**Nr. 142**

**Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (*CVaR*)  
bei Normal- bzw. Lognormalverteilung**

von

PETER ALBRECHT UND SVEN KORYCIORZ

Mannheim 01/2003

**Bestimmung des Conditional Value-at-Risk (CVaR)  
bei Normal- bzw. Lognormalverteilung**

Peter ALBRECHT / Sven KORYCIORZ

**1. Definitionen und Eigenschaften**

Gegeben: Konfidenzniveau  $0 < \mathbf{a} < 1$ .

a) Versicherungsfall:

Betrachte  $X = S - E(S)$ ,

$S$  : Gesamtschaden eines Kollektivs.

b) Investment-/ Bankenfall:

Betrachte  $X = v_t - V_{t+h} = L_h$ ,

Periodenverlust einer Finanzposition über betrachtete Haltedauer  $h$ .

[Vgl. ALBRECHT/MAURER (2002, S. 673 f.).]

Annahme: Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  von  $X$  besitze eine Dichtefunktion  $f(x) \geq 0$ .

Definition 1: (Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\mathbf{a}$ )

$$P(X \geq VaR_{\mathbf{a}}(X)) = \mathbf{a}.$$

[Bedingungsgleichung für VaR]

Folgerung:  $VaR_{\mathbf{a}}$  entspricht dem  $(1-\mathbf{a})$ -Quantil der Verteilung  $F$  von  $X$ ; formal:

$$VaR_{\mathbf{a}}(X) = F_X^{-1}(1-\mathbf{a}).$$

Ökonomische Interpretation: Notwendige Kapitalunterlegung/Reservebildung, um Periodenverlust der Höhe  $X$  „aufzufangen“ [„Quantilreserve“].

Statistische Interpretation:  $100(1-\mathbf{a})\%$ -Maximalverlust.

Definition 2: (Conditional Value-at-Risk zum Konfidenzniveau  $\alpha$ )

$$CVaR_{\alpha}(X) = E[X \mid X \geq VaR_{\alpha}(X)].$$

[Vgl. ALBRECHT/MAURER (2002, S. 675).]

Anmerkung:  $CVaR$  ist ein Spezialfall des Tail-Conditional-Expectation ( $TCE$ ).

$$TCE_z(X) := E[X \mid X \geq z].$$

Anmerkung: Es gilt:

$$\begin{aligned} TCE_z(X) &= z + E[X - z \mid X \geq z] \\ &= z + MEL_z(X), \end{aligned}$$

$MEL_z(X)$  = Mean Excess Loss von  $X$  relativ zu  $z$ .

Folgerung/Interpretation:

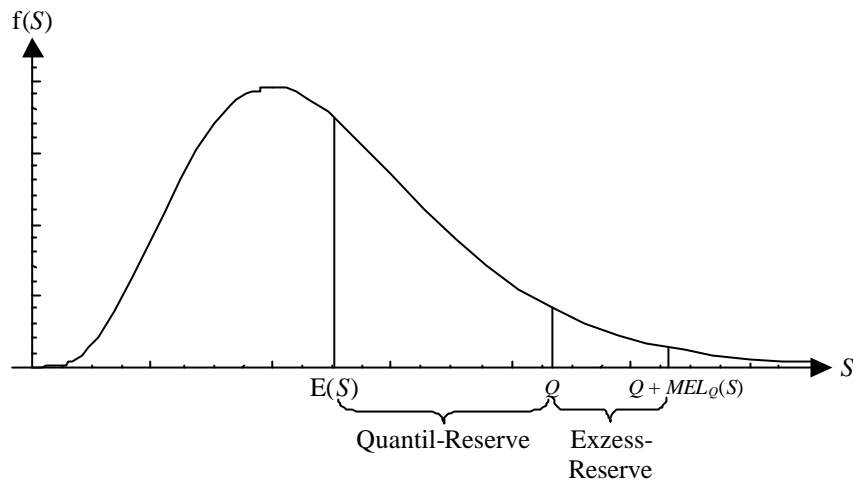
$$CVaR_{\alpha}(X) = \underbrace{VaR_{\alpha}(X)}_{\substack{\text{"100(1-\alpha)\%} \\ \text{Maximalverlust}}} + \underbrace{E[X - VaR_{\alpha}(X) \mid X \geq VaR_{\alpha}(X)]}_{\substack{\text{mittlere Überschreitung im} \\ \text{Überschreitungsfall} \\ \text{(mittlere bedingte Überschreitung)}}$$

oder: „Quantil-Reserve“ + „Exzess-Reserve“,

bzw.:  $CVaR$  beinhaltet zusätzliche Reserve für die mittlere Überschreitung im Überschreitungsfall.

Folgerung:  $CVaR_{\alpha} \geq VaR_{\alpha}$ .

Statistische Interpretation: Durchschnittlicher Maximalverlust in den 100  $\alpha$  % schlimmsten Fällen.

Versicherungsfall:

Wobei:  $Q = VaR_a(S) = F_S^{-1}(1 - a)$ ,  
 $MEL_Q(S) := E[S - Q | S \geq Q]$ .

Eigenschaft des CVaR:

Kohärentes Risikomaß im Sinne von ARTZNER ET AL. (1999), wenn  $X$  Verteilung mit Dichtefunktion („stetige Verteilung“).

[Vgl. ACERBI/TASCHE (2002, S. 1490 f.).]

Anmerkung: Im diskreten bzw. gemischten Falle ist Modifikation notwendig, um kohärentes Risikomaß zu erhalten.

[Vgl. ACERBI/TASCHE (2002).]

## 2. Allgemeine Berechnung

Annahme: Existenz einer Dichte.

$$1) \text{ Direkt: } E[X | X \geq z] = \frac{1}{P(X \geq z)} \int_z^{\infty} x f(x) dx.$$

2) Über *MEL*:

$$\begin{aligned} E[X | X \geq z] &= z + E[X - z | X \geq z] \\ &= z + \frac{E[\max(X - z, 0)]}{P(X \geq z)} \\ &= z + \frac{\text{mittlere Exzess - Erwartung } UPM_1(z; X)}{\text{Exzess - Wahrscheinlichkeit } UPM_0(z; X)}. \end{aligned}$$

Anmerkung zu 2):

Letzteres ist die analoge Konstruktion für den Exzess-Fall, wie die Berechnung des *MEL* im Shortfall.

[Vgl. *ALBRECHT/MAURER* (2002, S. 110).]

$$\text{D. h.: } E[\max(z - X, 0)] = P(X \leq z) E[z - X | X \leq z].$$

$$\text{Hier: } E[\max(X - z, 0)] = P(X \geq z) E[X - z | X \geq z].$$

Anmerkung zu 1):

Definieren wir  $E^z(X) = \int_z^{\infty} x f(x) dx$ , das obere partielle Moment 1. Ordnung, so

gilt:

$$E[X | X \geq z] = \frac{E^z(X)}{P(X \geq z)},$$

und man kann zur Berechnung des *TCE* direkt auf die Resultate von *WINKLER ET AL.* (1972) zurückgreifen.

### 3. Normalverteilungsfall

Gegeben:  $X \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$ .

Es gilt:  $VaR_{\mathbf{a}}(X) = E(X) + N_{1-\mathbf{a}} \mathbf{s}(X)$ ,

wobei  $N_{1-\mathbf{a}}$  das  $(1-\mathbf{a})$ -Quantil der Standard-Normalverteilung bezeichnet.

[Vgl. ALBRECHT/MAURER (2002, S. 675).]

Bestimmung des TCE:

Sei  $z_N := \frac{z - \mathbf{m}}{\mathbf{s}}$  und bezeichne  $\Phi(x)$  die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße bzw.  $\mathbf{j}(x)$  deren Dichte, so gilt:

$$1) \quad P(X \geq z) = 1 - \Phi(z_N).$$

$$2) \quad E^{z_N}(X) = \mathbf{m}[1 - \Phi(z_N)] + \mathbf{s} \mathbf{j}(z_N).$$

[Vgl. etwa ALBRECHT (1994, S. 337).]

$$3) \quad TCE_z(X) = \frac{E^{z_N}(X)}{P(X \geq z)} \\ = \mathbf{m} + \frac{\mathbf{j}(z_N)}{1 - \Phi(z_N)} \mathbf{s}.$$

Bestimmung des CVaR:

$$z = VaR_{\mathbf{a}} = \mathbf{m} + N_{1-\mathbf{a}} \mathbf{s},$$

$$\Rightarrow z_N = N_{1-\mathbf{a}}.$$

Nebenrechnung:  $N_{1-\mathbf{a}} = \Phi^{-1}(1-\mathbf{a}) \Rightarrow \Phi(N_{1-\mathbf{a}}) = 1-\mathbf{a} \Rightarrow 1 - \Phi(N_{1-\mathbf{a}}) = \mathbf{a}$ .

Fazit:

$$CVaR_a(X) = E(X) + \frac{j(N_{1-a})}{a} s(X)$$

Im Vergleich zu  $VaR_a$  wird somit auf  $E(X)$  ein höheres (da  $CVaR_a \geq VaR_a$ ) Multiplum der Standardabweichung hinzuaddiert, d. h.  $j(N_{1-a})/a \geq N_{1-a}$ .

$$\begin{aligned} CVaR_a(X) - VaR_a(X) &= \left[ \frac{j(N_{1-a})}{a} - N_{1-a} \right] s(X) \\ &= \frac{j(N_{1-a}) - a N_{1-a}}{a} s(X). \end{aligned}$$

Folgerung: Exzess-Reserve  $E[X - z \mid X \geq z] = \frac{j(N_{1-a}) - a N_{1-a}}{a} s(X)$ .

Numerisches Beispiel:

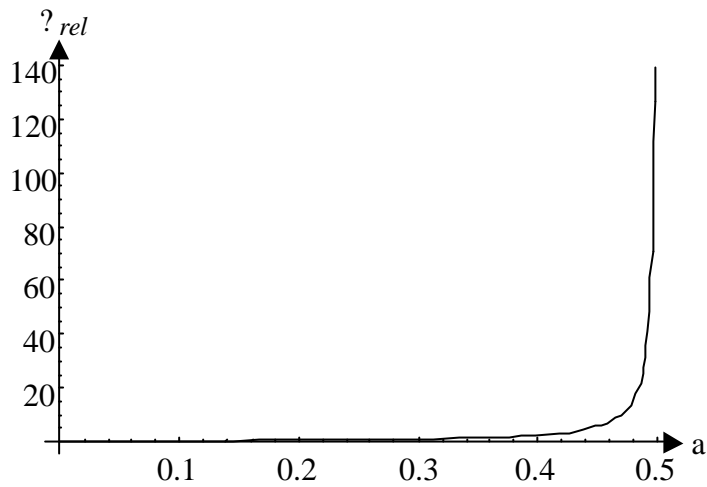
$a$	$N_{1-a}$	$j(N_{1-a})/a$
0.1	1.28	1.75
0.05	1.65	2.06
0.01	2.33	2.67
0.005	2.58	2.89

Anmerkung: Relative Differenz ( $\Delta_{rel}$ ) wird immer geringer.

Anmerkung: Es gilt:

$$\Delta_{rel} := \frac{j(N_{1-a})/a - N_{1-a}}{N_{1-a}} = \frac{j(N_{1-a})/a}{N_{1-a}} - 1 \text{ fällt monoton gegen Null für } a \rightarrow 0.$$

Verlauf der Funktion:



#### 4. Lognormalverteilungsfall

Gegeben:  $\ln X \sim N(m, v^2)$ .

Es gilt:  $VaR_a(X) = \exp(m + N_{1-a} v)$ .

[(1-a)-Quantil der Lognormalverteilung, vgl. ALBRECHT/MAURER (2002, S. 114).]

Bestimmung des TCE:

Sei  $z_{LN} := (\ln z - m) / v$ , so gilt:

$$1) \quad P(X \geq z) = P(\ln X \geq \ln z) = 1 - \Phi(z_{LN}).$$

$$2) \quad E^{z_{LN}}(X) = e^{m + \frac{1}{2}v^2} [1 - \Phi(z_{LN} - v)].$$

[Vgl. ALBRECHT (1994, S. 337).]



$$\begin{aligned}
3) \quad TCE_z(X) &= E^{z_{LN}}(X) / P(X \geq z) \\
&= e^{m + \frac{1}{2}v^2} \frac{1 - \Phi(z_{LN} - v)}{1 - \Phi(z_{LN})} \\
&= E(X) \frac{1 - \Phi(z_{LN} - v)}{1 - \Phi(z_{LN})}.
\end{aligned}$$

Bestimmung des CVaR:

$$z = VaR_a.$$

$$z_{LN} = \frac{\ln z - m}{v} = N_{1-a}.$$

Wie zuvor:  $1 - \Phi(z_{LN}) = a.$

Fazit:

$$CVaR_a(X) = E(X) \frac{1 - \Phi(N_{1-a} - v)}{a}$$

Beziehung zum VaR ?

Umrechnung von  $VaR_a$  :

$$\begin{aligned}
VaR_a(X) &= e^{m + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v^2 + N_{1-a} v} \\
&= E(X) \exp(N_{1-a} v - \frac{1}{2}v^2).
\end{aligned}$$

„Zuschlag“ zu  $E(X)$  ist im Gegensatz zur Normalverteilung hier nicht additiv, sondern multiplikativ.

Wegen  $CVaR_a \geq VaR_a$  müsste also gelten:

$$\frac{1 - \Phi(N_{1-a} - v)}{a} \geq \exp(N_{1-a} v - \frac{1}{2} v^2).$$

Numerisches Beispiel:

Multiplikative Zuschlagsfaktoren für  $a$  und „repräsentative  $v$ -Werte“.

Möglicher Ansatzpunkt: Gehe aus von der Hypothese

$$\text{Var}(X) = I E(X)^2.$$

Es gilt dann [vgl. ALBRECHT/MAURER (2002, S. 96)]:

$$\begin{aligned} v^2 &= \ln \left[ 1 + \frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2} \right] \\ &= \ln(1 + I) \end{aligned}$$

$$\text{bzw. } v = \sqrt{\ln(1 + I)}.$$

Zahlenbeispiel:

$I$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$v$	0.64	0.83	0.96	1.05	1.12	1.18

Multipl. des Erwartungswerts im Falle des  $VaR_a$  :

$$Mult_{VaR} = \exp(N_{1-a} v - \frac{1}{2} v^2).$$

Multipl. des Erwartungswerts im Falle des  $CVaR_a$  :

$$Mult_{CVaR} = \frac{1 - \Phi(N_{1-a} - v)}{a}.$$

$v = 0.64$ :

$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	2.60	1.84
0.05	3.13	2.33
0.01	4.56	3.59
0.005	5.25	4.21

 $v = 0.83$ :

$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	3.27	2.06
0.05	4.17	2.78
0.01	6.76	4.90
0.005	8.13	6.04

 $v = 0.96$ :

$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	3.73	2.16
0.05	4.92	3.05
0.01	8.55	5.86
0.005	10.55	7.44

 $v = 1.05$ :

$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	4.08	2.21
0.05	5.51	3.24
0.01	10.06	6.61
0.005	12.66	8.59

 $v = 1.12$ :

$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	4.36	2.24
0.05	5.99	3.37
0.01	11.37	7.22
0.005	14.52	9.55

 $v = 1.18$ :

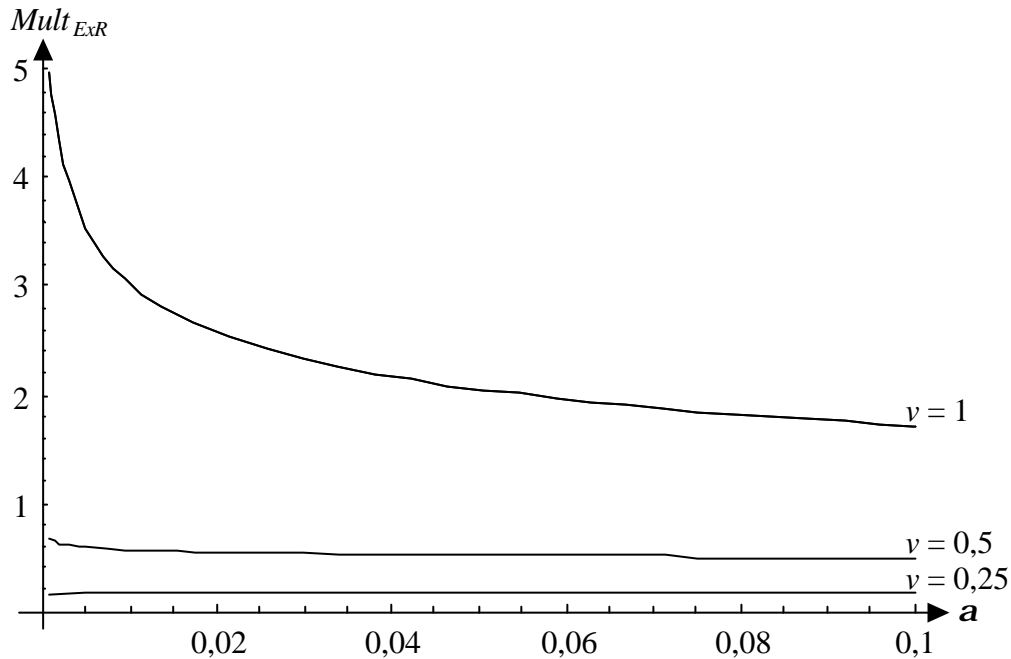
$\mathbf{a}$	$\mathbf{Mult}_{CVaR}$	$\mathbf{Mult}_{VaR}$
0.1	4.59	2.26
0.05	6.40	3.47
0.01	12.53	7.74
0.005	16.20	10.38

$$\begin{aligned}
 \text{Exzess - Reserve} &= E[X - z \mid X \geq z] = CVaR_a(X) - VaR_a(X) \\
 &= E(X) \left[ \frac{1 - \Phi(N_{1-a} - v)}{a} - \exp(N_{1-a} v - \frac{1}{2}v^2) \right] \\
 &= E(X) \underbrace{\left[ \frac{1 - \Phi(N_{1-a} - v) - a \exp(N_{1-a} v - \frac{1}{2}v^2)}{a} \right]}_{\mathbf{Mult}_{EXR}}.
 \end{aligned}$$

Weitere Aufschlüsse lassen sich nur numerisch erreichen.

Graphisches Beispiel:

Verlauf des Multiplers von  $E(X)$  im Falle der Exzess-Reserve ( $Mult_{ExR}$ ) für  $v = 1/0,5/0,25$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{a}$  :



Die Entwicklung der Exzess-Reserve (in absoluten Termen) ist uneinheitlich. Während in den obigen numerischen Beispielfällen mit abnehmendem  $\mathbf{a}$  das Multiplum von  $E(X)$  – und damit die Exzess-Reserve (der  $MEL$ ) – kontinuierlich ansteigt, ergibt sich für „weniger riskante“ Zufallsvariable  $X$  ein anderes Bild. Für kleine Werte von  $v$ , das heißt bei geringer Schiefe  $\mathbf{g}(X) = \sqrt{\exp(v^2) - 1} (2 + \exp(v^2)) > 0$ , lässt sich beobachten, dass das Multiplum  $Mult_{ExR}$  (mit sinkendem  $\mathbf{a}$ ) abnimmt (siehe Abbildung für  $v = 0,25$ ).

Die Relation Exzess-Reserve/Quantil-Reserve nimmt stets ab (mit zunehmendem  $\mathbf{a}$ ), das heißt, im Falle eines Anstiegs der Exzess-Reserve wächst die Quantil-Reserve verhältnismäßig stärker an.

## Appendix: CVaR-Berechnung im Renditefall

Während im Haupttext auf die CVaR-Berechnung auf der Basis von *Verlustpositionen* eingegangen wurde, soll nunmehr der Renditefall (bzw. der Fall einer absoluten Gewinn-/Verlustposition) beleuchtet werden.

Gegeben:  $X$  = Rendite oder absolute Gewinn-/Verlustposition.

Definition A1: (Tail Conditional Expectation)

$$\begin{aligned} TCE_z(X) &:= E[X \mid X \leq z] \\ &= \frac{1}{P(X \leq z)} \int_{-\infty}^z x \, dF(x) = \frac{E^z(X)}{F(z)}, \end{aligned}$$

mit:  $z$  : Target,  $F$  : Verteilungsfunktion,  $E^z$  : partielles Moment.

Definition A2: (Conditional Value-at-Risk)

$$CVaR_a(X) = E[X \mid X \leq VaR_a(X)],$$

d. h.  $CVaR_a(X) = TCE_z(X)$  für  $z = VaR_a(X)$ .

I. Normalverteilung:  $X = R \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{s}^2)$

a)  $E^z(X) = \mathbf{m} \Phi(z_N) - \mathbf{s} \mathbf{j}(z_N),$

wobei:  $z_N := (x - \mathbf{m})/\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{m} = E(X)$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(X)$ .

[Vgl. ALBRECHT (1993, S. 601).]

b)  $F(z) = \Phi(z_N).$

$$c) \quad TCE_z(X) = m - \frac{j(z_N)}{\Phi(z_N)} s.$$

$$d) \quad z = VaR_a(X) = m - N_{1-a} s,$$

$$z_N = \frac{m - N_{1-a} s - m}{s} = -N_{1-a} = N_a,$$

$$\Phi(N_a) = \Phi[\Phi^{-1}(a)] = a,$$

$$j(x) = j(-x), \text{ d. h. } j(-N_{1-a}) = j(N_{1-a}).$$

Fazit:

$$CVaR_a(X) = m - \frac{j(N_{1-a})}{a} s$$

II. Lognormalverteilung:  $X = 1 + R \sim \text{LN}(m, v^2)$

$$z_{LN} := \frac{\ln(1+z) - m}{v}.$$

$$a) \quad E^z(X) = \exp\left(m + \frac{1}{2} v^2\right) \Phi(z_{LN} - v).$$

[Vgl. ALBRECHT (1993, S. 601).]

$$b) \quad F(z) = \Phi(z_{LN}).$$

$$c) \quad TCE_z(X) = \exp\left(m + \frac{1}{2} v^2\right) \frac{\Phi(z_{LN} - v)}{\Phi(z_{LN})}$$

$$= E(X) \frac{\Phi(z_{LN} - v)}{\Phi(z_{LN})},$$

$$z = VaR_a(X) = \exp(m - N_{1-a} v) - 1,$$

$$z_{LN} = \frac{m - N_{1-a} \quad v - m}{v} = -N_{1-a} = N_a,$$

$$\Phi(N_a) = a.$$

Fazit:

$$CVaR_a(X) = E(X) \frac{\Phi(-N_{1-a} - v)}{a}$$

**Literatur:**

ACERBI, C.; D. TASCHE (2002): On the coherence of Expected Shortfall, in: *Journal of Banking and Finance* 26, No. 7, S. 1487-1503.

ALBRECHT, P. (1993): Analyse der Zufallsgesetzmäßigkeit von Unterrenditen, in: HIPP, C. et al. (Hrsg.): *Geld, Finanzwirtschaft, Banken und Versicherungen*, Karlsruhe, S. 585-602.

ALBRECHT, P. (1994): Dimensionen des versicherungstechnischen Risikos, in: HESBERG, D.; M. NELL; W. SCHOTT (Hrsg.): *Risiko – Versicherung – Markt*, Festschrift für Walter Karten zur Vollendung des 60. Lebensjahres, Karlsruhe, S. 325-339.

ALBRECHT, P.; R. MAURER (2002): *Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen*, Stuttgart.

ARTZNER, P.; F. DELBAEN; J.-M. EBER; D. HEATH (1999): Coherent Measures of Risk, in: *Mathematical Finance* 9, No. 3, S. 203-228.

WINKLER R. L.; G. M. ROODMAN; R. B. BRITNEY (1972): The determination of partial moments, in: *Management Science* 19, No. 3, S. 290-296.