Referenzpunktbezogene risikoadjustierte Performancemaße: Theoretische Grundlagen

Peter Albrecht und Timo Klett

1 Einführung

Ausgangspunkt der weiteren Ausführungen bildet der in *Albrecht* (1994) sowie in *Albrecht/Maurer/Möller* (1998) entwickelte generelle Ansatz zur einheitlichen Fundierung von referenzpunktbezogenen Risiko- und Chancenmaßen[1]. Im Kontext von Finanz- und Versicherungsanwendungen[2] ist der Referenzpunkt dabei standardmäßig eine angestrebte finanzielle Zielgröße (target) z. Das Risikopotenzial einer spezifischen Strategie wird dann intuitiv als Ausmaß der Gefahr der Unterschreitung der angestrebten Zielgröße verstanden, entsprechend das Chancenpotential als Ausmaß der Chance der Überschreitung des Finanztargets.

Auf der Basis einer Quantifizierung des Risiko- und Chancenpotenzials ist zur Evaluierung von Finanz- und Versicherungsentscheidungen dann noch die Problematik des Trade-offs zwischen Risiko- und Chancenpotenzial zu lösen. Dies kann entweder im Rahmen eines nutzentheoretischen Kalküls geschehen[3], oder aber – und dies wird in Praxisanwendungen oftmals bevorzugt – auf der Basis eines risikoadjustierten Performancemaßes. Das klassische risikoadjustierte Performancemaß ist dabei die Sharpe-Ratio[4].

Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Ausarbeitung eine allgemeine Fundierung referenzpunktbezogener risikoadjustierter Performancemaße vorgenommen. Darüber hinaus werden die strukturellen Eigenschaften dieser Performancemaße untersucht und die Verbindungen zu in der Literatur dokumentierten Performancemaßen aufgezeigt.

2 Shortfallrisiko- und Excesschancenmaße

Wir betrachten im Weiteren eine beliebige Zufallsgröße X – in Praxisanwendungen ist dies typischerweise eine Renditegröße oder eine absolute Gewinn-/Verlustposition – mit zugehöriger Verteilungsfunktion *F(x)* und zerlegen deren Wertebereich relativ zu einem

---

1 Referenzpunktbezogene Entscheidungskalküle werden darüber hinausgehend sowohl im Rahmen der Bernoulli-Nutzentheorie, vgl. etwa *Fishburn/Kochenberger* (1979), als auch im Rahmen der Prospect Theorie, vgl. etwa *Kahnemann/Tversky* (1979) und *Tversky/Kahnemann* (1992), betrachtet.

2 Anwendungen im Finanz- und Versicherungskontext werden umfangreich dokumentiert in *Albrecht/Maurer/Möller* (1998, S. 259 ff.).

3 Vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer/Möller* (1998, S. 257 ff.).

4 Vgl. etwa *Sharpe* (1994).

Referenzpunkt z. In graphischen Termen kann dies (im Falle der Existenz einer Dichtefunktion) wie in Abbildung 1 illustriert werden:

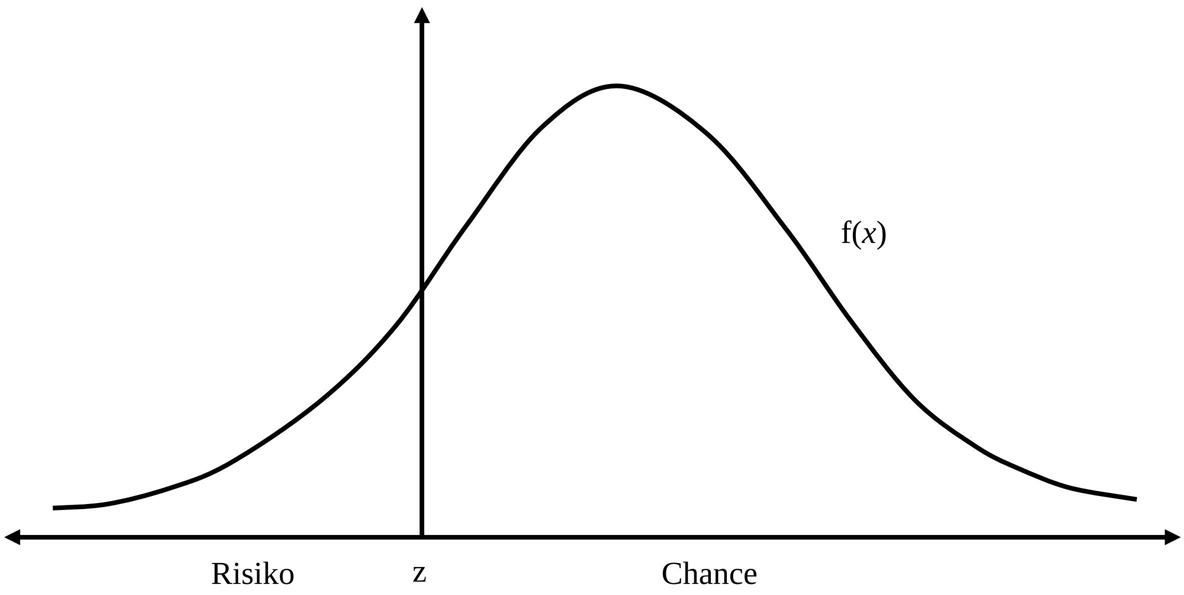

Abbildung 1: Shortfall- und Excessbereich einer Zufallsgröße relativ zur Zielgröße z

Zur Quantifizierung dieser Verhältnisse zerlegen wir die Zufallsgröße X in die drei folgenden Teile:

$$X = \max(X - z, 0) + z - \max(z - X, 0)\ . \tag{1}$$

Dabei erfasst die Zufallsgröße $\max(z - X, 0)$ die Höhe der potenziellen Fehlbeträge (shortfall) der das Target z unterschreitenden Realisationen von X und entsprechend $\max(X - z, 0)$ die Höhe der potenziellen Übersteigungsbeträge (excess). Die Zufallsgesetzmäßigkeit von $\max(z - X, 0)$ quantifiziert das Verlustpotenzial von X relativ zu z und die Zufallsgesetzmäßigkeit von $\max(X - z, 0)$ das entsprechende Gewinnpotenzial. Zur Gewinnung entsprechender eindimensionaler Maßgrößen sind Verlust- bzw. Gewinnpotenzial jedoch noch zu bewerten. Wie in *Albrecht/Maurer/Möller* (1998) geschieht dies – in Anlehnung an die statistische Entscheidungstheorie – durch Einführung[5] einer Verlustfunktion $L : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bzw. einer

[5] Im Weiteren gehen wir dabei standardmäßig von L(0) = G(0) = 0 aus.

Gewinnfunktion $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Als allgemeines Maß für das Shortfallrisiko[6] ergibt sich dann

$$\begin{aligned} SR_z(X) &:= E[L(\max(z - X, 0))] \\ &= \int_{-\infty}^{z} L(z - x) dF(x) . \end{aligned} \tag{2}$$

Entsprechend ergibt sich als allgemeines Maß für die Excesschancen (upside reward)

$$\begin{aligned} EC_z(X) &:= E[G(\max(X - z, 0))] \\ &= \int_{z}^{\infty} G(x - z) dF(x) . \end{aligned} \tag{3}$$

Wählt man standardmäßig die Potenzfunktionen $L(x) = x^n$, $n \geq 0$ bzw. $G(x) = x^m$, $m \geq 0$ als Verlust- bzw. Gewinnfunktion, so entsprechen die resultierenden Risikomaße den Lower Partial Moments bzw. die resultierenden Chancenmaße den Upper Partial Moments[7]:

$$\begin{aligned} LPM_n(z, X) &:= E[\max(z - X, 0)^n] \\ &= \int_{-\infty}^{z} (z - x)^n dF(x) \\ &= n \int_{-\infty}^{z} (z - x)^{n-1} F(x) dx , \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} UPM_m(z, X) &:= E[\max(X - z, 0)^m] \\ &= \int_{z}^{\infty} (x - z)^m dF(x) \\ &= m \int_{z}^{\infty} (x - z)^{m-1} [1 - F(x)] dx . \end{aligned} \tag{5}$$

---

6 Anstelle des Terminus Shortfallrisiko ist in der Literatur auch der Terminus Downsiderisiko (downside risk) gebräuchlich.

7 Die jeweils letzte Identität der Beziehungen (4) und (5) folgt dabei gemäß den Regeln für die partielle Integration von Lebesgue-Integralen, vgl. etwa *Feller* (1971, S. 150 f.).

Im Falle der Lower Partial Moments sind die bekanntesten Spezialisierungen[8] die Shortfallwahrscheinlichkeit SW (für $n = 0$), der Shortfallerwartungswert SE (für $n = 1$) und die Shortfallvarianz SV (für $n = 2$). Entsprechend im Falle der Upper Partial Moments die Excesswahrscheinlichkeit XW $(m = 0)$, der Excesserwartungswert XE $(m = 1)$ und die Excessvarianz XV $(m = 2)$.

Neben den vorstehenden unbedingten Risikomaßen werden in der Literatur zunehmend auch bedingte Risikomaße betrachtet[9]. In Termen der vorstehenden allgemeinen Konstruktion von Shortfallrisikomaßen wäre das allgemeine bedingte Shortfallrisikomaß zu quantifizieren durch den folgenden bedingten Erwartungswert:

$$BSR_z(X) := E[L(\max(z - X, 0)) \mid X \le z]. \tag{6}$$

Infolge der Einschränkung der Betrachtung auf die Verhältnisse im "Worst Case" der Targetunterschreitung, d.h. die Bedingung $X \le z$, kann die Konstruktion (6) auch als allgemeines Maß für das *Worst Case-Risiko* apostrophiert werden. Als entsprechende Spezialisierungen ergeben sich die bedingten Lower Partial Moments:

$$\begin{aligned} BLPM_n(z; X) &:= E[\max(z - X, 0)^n \mid X \le z] \\ &= E[(z - X)^n \mid X \le z]. \end{aligned} \tag{7}$$

Der Fall $n = 1$ entspricht dem *Mean Excess Loss*[10] (*MEL*)

$$MEL_z(X) := E[z - X \mid X \le z]. \tag{8}$$

Aufgrund der allgemeinen Beziehung

$$E(Y) = E(Y \mid Y \le z)P(Y \le z) + E(Y \mid Y > z)P(Y > z) \tag{9}$$

---

8 Vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2002, S. 129).

9 Insbesondere der Mean Excess Loss, vgl. etwa *Albrecht* (2004, Beziehung (16)) oder die Mean Excess Function, vgl. etwa *Embrechts/Klüppelberg/Mikosch* (2002, S. 161).

10 Zur Anwendung des MEL zur Quantifizierung des Worst Case-Risikos einer Aktienanlage vgl. insbesondere *Albrecht/Maurer/Ruckpaul* (2001).

gilt dabei mit $Y := \max(z - X, 0)$ die folgende generelle Faktorisierung[11]

$$\begin{aligned} LPM_n(z; X) &= E[(z-X)^n \mid X \le z]\, P(X \le z) \\ &= BLPM_n(z; X)\, F(z)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus der Beziehung (10) in Verbindung mit (4) folgt insbesondere auch die Darstellung

$$BLPM_n(z; X) = \frac{\int_{-\infty}^{z} (z-x)^n \, dF(x)}{F(z)}\,. \tag{11}$$

Analog kann das allgemeine *Best Case-Chancenmaß* konstruiert werden gemäß

$$BEC_z(x) := E[G(\max(X - z, 0)) \mid X > z] \tag{12}$$

bzw. entsprechend die bedingten Upper Partial Moments gemäß

$$\begin{aligned} BUPM_m(z; X) &:= E[\max(X - z, 0)^m \mid X > z] \\ &= E[(X - z)^m \mid X > z]\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Als entsprechende Faktorisierung ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} UPM_m(z; X) &= E[(X - z)^m \mid X > z]\, P(X > z) \\ &= BUPM_m(z; X)[1 - F(z)]\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Hieraus folgt zudem der Zusammenhang

$$BUPM_m(z; X) = \frac{\int_{z}^{\infty} (x-z)^m \, dF(x)}{1 - F(z)}\,. \tag{15}$$

11 Vgl. auch *Albrecht/Maurer* (2002, S. 130).

Wendet man schließlich die Beziehung (9) auf $Y := (X - z)^n$ an, so ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mu_z^n(X) &:= E[(X-z)^n] \\ &= E[(X-z)^n \mid X \le z] P(X \le z) + E[(X-z)^n \mid X > z] P(X > z) \\ &= (-1)^n BLPM_n(z;X) F(z) + BUPM_n(z;X)[1 - F(z)] \\ &= (-1)^n LPM_n(z;X) + UPM_n(z;X) , \end{aligned} \tag{16}$$

der eine Koppelung der Lower und Upper Partial Moments der gleichen Ordnung n sowie der entsprechenden bedingten Größen beinhaltet.

3 Referenzpunktbezogene risikoadjustierte Performancemaße

Auf der Basis der Ausführungen in Abschnitt 2 liegen zwei grundlegende Konstruktionsformen von referenzpunktbezogenen risikoadjustierten Performancemaßen nahe, zum einen auf der Ebene der unbedingten Shortfallrisiko- bzw. Excesschancenmaße, zum anderen entsprechend auf der bedingten Ebene.

Auf der unbedingten Ebene definieren wir zunächst das *Omega-Performancemaß*[12]

$$\begin{aligned} \Omega_{LG}(z;X) &:= \frac{EC_z(X)}{SR_z(X)} \\ &= \frac{E[G(\max(X-z,0))]}{E[L(\max(z-X,0))]} . \end{aligned} \tag{17}$$

Grundsätzlich gibt das Omega-Performancemaß an, wie hoch die Excesschancen pro Einheit Shortfallrisiko sind.

---

12 Dieser Terminus wurde aufgrund des Zusammenhangs zu dem Performancemaß nach *Keating/Shadwick* (2002) gewählt, den wir noch herstellen wollen.

Auf der bedingten Ebene definieren wir entsprechend das *Psi-Performancemaß*[13]

$$\begin{aligned}\Psi_{LG}(z;X) &:= \frac{BEC_z(X)}{BSR_z(X)} \\ &= \frac{E[G(\max(X-z,0))\,|\,X>z]}{E[L(\max(z-X,0))\,|\,X\le z]}\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Grundsätzlich gibt das Psi-Performancemaß an, wie hoch die Excesschancen im Best Case pro Einheit Shortfallrisiko im Worst Case sind. Das Psi-Performancemaß (18) wurde aktuell von *Darsinos/Satchell* (2003) in die Literatur eingeführt, wobei die Autoren einen nutzentheoretischen Ansatz zugrunde legen.

Kommen wir nun zu den wichtigsten Spezialfällen des Omega- bzw. Psi-Performancemaßes. Grundlage hierfür bilden die Lower bzw. Upper Partial Moments, wobei in der Regel für beide von der gleichen Ordnung $n \ge 1$ ausgegangen wird. Das Omega-Performancemaß lautet dann

$$\begin{aligned}\Omega_n(z;X) &= \frac{UPM_n(z;X)}{LPM_n(z;X)} \\ &= \frac{n\int_z^{\infty}(x-z)^{n-1}[1-F(x)]\,dx}{n\int_{-\infty}^{z}(z-x)^{n-1}F(x)\,dx}\,.\end{aligned} \tag{19}$$

Entsprechend ergibt sich das Psi-Performancemaß in diesem Falle zu

$$\Psi_n(z;X) = \frac{BUPM_n(z;X)}{BLPM_n(z;X)} = \frac{UPM_n(z;X)/[1-F(z)]}{LPM_n(z;X)/F(z)}\,. \tag{20}$$

Bei gleicher Ordnung der (bedingten) Lower- und Upper Partial Moments haben im Falle einer absoluten Gewinn/Verlustposition in EURO-Termen Zähler und Nenner jeweils die gleiche Dimension, nämlich $(\text{EURO})^n$, was Zähler und Nenner direkt vergleichbar macht. Um Zähler und Nenner in der Einheit EURO zu messen, kann man auch die Größen

---

13 Dieser Terminus geht zurück auf *Darsinos/Satchell* (2003).

$(UPM_n)^{\frac{1}{n}}$ bzw. $(LPM_n)^{\frac{1}{n}}$ betrachten, mit entsprechender Variation für die bedingten Upper- bzw. Lower Partial Moments sowie für das Omega- bzw. Psi-Performancemaß. Der Ansatz von $(\Omega_n)^{\frac{1}{n}}$ bzw. $(\Psi_n)^{\frac{1}{n}}$ würde jedoch ein Ranking im Vergleich zu Ω_n bzw. Ψ_n unverändert lassen.

Im Spezialfall $n=1$ ergibt sich das Omega-Performancemaß $\Omega_1(z;X)=\Omega(z)$

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \frac{E[\max(X-z,0)]}{E[\max(z-X,0)]} = \frac{XE_z(X)}{SE_z(X)} \\ &= \frac{\int_z^\infty [1-F(x)]\,dx}{\int_{-\infty}^z F(x)\,dx}\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Das Omega-Performancemaß $\Omega(z)$ wurde von *Keating/Shadwick* (2002) in die Performancemessungsliteratur eingeführt[14]. *Keating/Shadwick* (2002) belegen $\Omega(z)$ zudem mit der Bezeichnung "universelles Performancemaß". Performancemaße des Typus $XE_z(X)/SE_z(X)$ wurden auch schon früher in der Literatur betrachtet, so etwa von *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995, S. 201) im Zusammenhang mit der Evaluation der Performance von Wertsicherungsstrategien. Ein wesentlicher neuer Aspekt von *Keating/Shadwick* ist allerdings die Betonung des Gesichtspunktes, dass man das Target z variieren kann, um die Sensitivität der referenzpunktbezogenen Performance in Bezug auf den Referenzpunkt zu erfassen. In einem solchen Zusammenhang bietet es sich dann auch an, von der *Omega-Funktion* zu sprechen, wie *Keating/Shadwick* (2002) dies tun.

Bevor wir auf weitere strukturelle Eigenschaften der Omega- bzw. Psi-Performancemaße eingehen, sollen im Folgenden noch einige Varianten in der Konstruktion eines referenzpunktbezogenen Performancemaßes behandelt werden.

Eine erste Hauptvariante besteht dabei darin, anstelle des Excesserwartungswertes $XE_z(X)$ den durchschnittlichen Excess $E(X)-z$ als Zählergröße zu verwenden.

---

[14] Vgl. auch *Cascon/Keating/Shadwick* (2003 a, b).

Dies führt auf das Performancemaß

$$DPR_z(X) := \frac{E(X)-z}{LPM_1(z;X)} = \frac{E(X)-z}{E[\max(z-X,0)]}\,, \tag{22}$$

das im Weiteren als *Downside Performance Ratio* bezeichnet werden soll. Eine Variante hiervon, die zu einem identischen Ranking führt, ist $E(X)/LPM_1(z;X)$. Diese wurde etwa von *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995, S. 200) betrachtet.

Die zweite Hauptvariante besteht darin, anstelle der Shortfallerwartung im Nenner die Shortfallstandardabweichung $SSA_z(X) := LPM_2(z;X)^{\frac{1}{2}}$, d.h. die Wurzel aus der Shortfallvarianz zu verwenden. Auch bei dieser Variante ergibt sich im Nenner eine Größe der Dimension EURO. Die Vornahme dieser Variation führt auf die Performancemaße

$$\begin{aligned} UP_z(X) := \frac{XE_z(X)}{SSA_z(X)} &= \frac{E[\max(X-z,0)]}{\sqrt{E[\max(z-X,0)^2]}} \\ &= \frac{\int_z^\infty [1-F(x)]\,dx}{\sqrt{2\int_{-\infty}^z (z-x)F(x)\,dx}} \end{aligned} \tag{23}$$

sowie

$$SOR_z(X) := \frac{E(X)-z}{SSA_z(X)}\,. \tag{24}$$

Das Performancemaß $UP_z(X)$ wird in der Literatur als *Upside Potential Ratio*[15] oder UP-Ratio[16] bezeichnet. Auch diese Variante wurde bereits von *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995, S. 201) betrachtet.

---

15 Vgl. etwa *Forsey* (2001, S. 58) oder *Plantinga/De Groot* (2001, S. 180).

16 Vgl. etwa *Sortino* (2001, S. 15).

Das Performancemaß $SOR_z(X)$ wird in der Literatur auch als *Sortino-Ratio* bezeichnet[17]. Es stellt quasi das Äquivalent der Sharpe-Ratio in einem Shortfallrisikokontext dar. *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995, S. 200) betrachten die Variante $E(X)/SSA_z(X)$, die zu einem identischen Ranking führt.

Abschließend sei noch erwähnt, dass die entsprechende allgemeine Konstruktion der Performancemaße (22) bzw. (24) gegeben ist durch

$$GDPR_n(z;X) := \frac{E(X)-z}{[LPM_n(z;X)]^{\frac{1}{n}}} \tag{25}$$

bei dem der durchschnittliche Excess durch die n-te Wurzel des Lower Partial Moments der Ordnung n dividiert wird. Dieses Performancemaß soll im Weiteren als *Generalized Downside Performance Ratio* bezeichnet werden.

4 Strukturelle Beziehungen[18] zwischen den Performancemaßen

Wir konzentrieren uns im Weiteren auf die Omega- bzw. Psi-Performancemaße im Falle von Verlust- bzw. Gewinnfunktionen in Potenzform, d.h. die Maße des Typus (19) und (20).

Zwischen dem Omega- und dem Psi-Performancemaß der gleichen Ordnung n gilt dann der folgende fundamentale Zusammenhang, der auf den Beziehungen (10) und (14) beruht:

$$\begin{aligned} \Omega_n(z;X) &= \frac{BUPM_n(z;X)[1-F(z)]}{BLPM_n(z;X)F(z)} \\ &= \frac{[1-F(z)]}{F(z)}\ \Psi_n(z;X) \\ &= \left[\frac{1}{F(z)}-1\right]\ \Psi_n(z;X)\ . \end{aligned} \tag{26}$$

---

[17] Vgl. etwa *Plantinga/De Groot* (2001, S. 179).

[18] Vgl. zu diesen strukturellen Beziehungen generell *Darsinos/Satchell* (2003, S. 5).

Aufgrund dieses engen Zusammenhangs genügt es, nur eines der beiden Performancemaße zu berechnen, das andere ergibt sich aufgrund von (26) bzw. dem entsprechenden inversen Zusammenhang jeweils unmittelbar.

Aufgrund von (20) in Verbindung mit (16) gilt nun des Weiteren zunächst:

$$\Psi_n(z;X) = \frac{E[(X-z)^n]}{[1-F(z)]BLPM_n(z;X)} - (-1)^n \frac{F(z)}{[1-F(z)]} \ . \tag{27}$$

Diese Darstellung des Psi-Maßes enthält neben dem n-ten Moment der Zufallsgröße X um den Referenzpunkt nur noch das bedingte Lower Partial Moment der Ordnung n.

Das n-te Moment $E[(X-z)^n]$ um den Referenzpunkt z kann man nun folgendermaßen auf die k-ten zentrierten Momente $\mu_k = E[(X-\mu)^k]$ um den Mittelwert $\mu = E(X)$ zurückführen[19]:

$$\begin{aligned} E[(X-z)^n] &= E[(X-\mu+\mu-z)^n] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(X-\mu)^k(\mu-z)^{n-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu_k(\mu-z)^{n-k} \ . \end{aligned} \tag{28}$$

Damit ergibt sich die folgende Darstellung des Psi-Maßes

$$\Psi_n(z;X) = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu_k(\mu-z)^{n-k}}{[1-F(z)]BLPM_n(z;k)} - (-1)^n \frac{F(z)}{[1-F(z)]} \ , \tag{29}$$

die neben dem bedingten Lower Partial Moment der Ordnung n nur noch die zentrierten Momente der Zufallsgröße X bis zur Ordnung n enthält.

---

19 Wegen $\mu_1 = 0$ ist dabei der Term für $k = 1$ ebenfalls gleich null.

Für das Omega-Performancemaß gilt aufgrund von (28) in Verbindung mit (10) und (29) entsprechend

$$\Omega_n(z;X) = \frac{E[(X-z)^n]}{LPM_n(z;X)} - (-1)^n$$
$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (\mu - z)^{n-k}}{LPM_n(z;X)} - (-1)^n \,. \tag{30}$$

Die letztere Darstellung des Omega-Maßes beinhaltet neben den Zentralmomenten von X bis zur Ordnung n nur noch das Lower Partial Moment der Ordnung n.

Aus (30) folgt weiterhin[20]

$$\Omega_n(z;X) = \frac{[E(X)-z]^n}{LPM_n(z;X)} + \frac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (\mu - z)^{n-k}}{LPM_n(z;X)} - (-1)^n \,. \tag{31}$$

Hieraus lässt sich der folgende grundsätzliche, wenn auch im Detail komplexe, Zusammenhang zwischen dem Omega-Maß und dem Performancemaß $GDPR_z(X)$ gemäß (25) ableiten:

$$GDPR_z(X) = \left[\Omega_n(z;X) - \frac{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (\mu - z)^{n-k}}{LPM_n(z;X)} + (-1)^n \right]^{1/n} \,. \tag{32}$$

Für die Sortino-Ratio (24) ergibt sich damit $(n = 2)$ der folgende Zusammenhang zum Omega-Maß der Ordnung 2

$$SOR_z(X) = \sqrt{\Omega_2(z;X) - \frac{E[(X-\mu)^2]}{LPM_2(z;X)} + 1} \,. \tag{33a}$$

---

20 Man beachte hierbei wiederum, dass $\mu_1 = 0$.

Entsprechend lautet der inverse Zusammenhang

$$\Omega_2(z;X) = SOR_z^2(X) + \frac{E[(X-\mu)^2]}{LPM_2(z;X)} - 1\,. \tag{33b}$$

Aufgrund von (16) gilt des Weiteren $E(X) - z = UPM_1 - LPM_1$. Damit besteht der folgende Zusammenhang zwischen der Sortino-Ratio gemäß (24) und dem Upside Potential Ratio gemäß (23)

$$UP_z(X) = SOR_z(X) + \frac{LPM_1(z;X)}{SSA_z(X)}\,. \tag{34}$$

Konzentrieren wir uns abschließend auf den Fall $n = 1$, das Omega-Maß $\Omega(z)$. Aufgrund von (31) folgt hier unmittelbar:

$$\Omega(z) = \frac{E(X) - z}{LPM_1(z;X)} + 1 = DPR_z(X) + 1\,. \tag{35}$$

Damit besteht ein sehr enger Zusammenhang mit dem entsprechenden Performancemaß $DPR_z(X)$, bei dem im Zähler der durchschnittliche Excess $E(X) - z$ verwendet wird und nicht die Excesserwartung $E[\max(X - z, 0)]$, wie im Falle des Omega-Performancemaßes.

Aufgrund von (26) gilt damit weiterhin:

$$\Psi_1(z;X) = \frac{F(z)}{[1 - F(z)]}\,[1 + DPR_z(X)]\,. \tag{36}$$

5 Strukturelle Eigenschaften der Omega-Funktion

In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf die Eigenschaften des Omega-Performancemaßes der Ordnung 1, der Omega-Funktion, deren bisher behandelte Varianten nachfolgend nochmals dargestellt sind:

$$\Omega(z) = \frac{E[\max(X-z,0)]}{E[\max(z-X,0)]} = \frac{\int_z^\infty [1-F(x)]\,dx}{\int_{-\infty}^z F(x)\,dx} = 1 + \frac{E(X)-z}{E[\max(z-X,0)]}\,. \tag{37}$$

Definieren wir $I_1(z) := \int_{-\infty}^{z} F(x)\,dx$ und $I_2(z) := \int_z^\infty [1-F(x)]\,dx$, so gelten für eine stetige Verteilungsfunktion F die folgenden Aussagen[21]:

(A)

$$\frac{d\,\Omega(z)}{dz} = \frac{F(z)[I_1(z)-I_2(z)]-I_1(z)}{I_1^2(z)}\,. \tag{38}$$

$\Omega(z)$ ist damit eine differenzierbare und insbesondere stetige Funktion.

(B) $\Omega(z)$ ist eine monoton fallende Funktion in z.

(C) Mit $\mu = E(X)$ gilt $\Omega(\mu) = 1$ für beliebige Zufallsvariable *X*.

Zu (A): Dies folgt aus $d\,I_1(z)/dz = F(z)$ sowie $d\,I_2(z)/dz = F(z)-1$ und der Anwendung der Quotientenregel.

[21] Vgl. zu diesen Aussagen *Cascon/Keating/Shadwick* (2003 a, S. 4).

Zu (B): Zunächst gilt $F(x) \geq 0$ und wegen $F(x) \leq 1$ auch $1 - F(x) \geq 0$. Hieraus folgt $I_1 \geq 0$ und $I_2 \geq 0$. Für den Zähler von (38) gilt damit $F(z)[I_1 - I_2] - I_1$ $= [F(z) - 1] I_1 - F(z) I_2 < 0$, denn der erste Term ist nicht positiv und der zweite Term nicht negativ. Damit ist insgesamt (38) nicht positiv.

Zu (C): Aufgrund von (1) gilt für $\mu = E(X)$ die Beziehung $\mu = \int_{\mu}^{\infty} [1 - F(x)] dx$ $- \int_{-\infty}^{\mu} F(x) dx + \mu$ und damit $\int_{\mu}^{\infty} [1 - F(x)] dx = \int_{-\infty}^{\mu} F(x) dx$.

Ferner gilt für zwei Zufallsvariable X und Y mit stetigen Verteilungsfunktionen F und G die Aussage[22]

(D) $\Omega_F = \Omega_G$ genau dann, wenn F = G.

Es besteht somit eine bijektive Beziehung zwischen der Menge der stetigen Verteilungsfunktionen und ihren Omega-Funktionen.

Betrachten wir abschließend eine positive lineare Transformation $Y := a + bX$ $(b > 0)$ von X. Es gilt dann[23]:

(E) $\Omega_Y(z) = \Omega_X\left(\frac{z-a}{b}\right)$ bzw. äquivalent $\Omega_Y(a + bz) = \Omega_X(z)$.

Zu (E): Für $b > 0$ gilt generell $LPM_n(z; a + bX) = b^n LPM_n\left(\frac{z-a}{b}; X\right)$ und ebenso $UPM_n(z; a + bX) = b^n UPM_n\left(\frac{z-a}{b}; X\right)$.

---

22 Zum Beweis vgl. *Cascon/Keating/Shadwick* (2003 a, S. 5).

23 Vgl. hierzu auch *Keating/Shadwick* (2002, S. 7 f.).

6 Verteilungsgebundene Bestimmung referenzpunktbezogener Performancemaße

6.1 Vorbemerkungen

Zunächst merken wir an, dass aufgrund der Resultate des Abschnitts 4 sämtliche referenzpunktbezogenen Performancemaße berechnet werden können, wenn neben den zentrierten Momenten $E[(X-\mu)^n]$ der Zufallsgröße X die Lower Partial Moments $LPM_n(z;X)$ bekannt sind. Unter Benutzung der partiellen Momente

$$E_z(X^n) := \int_{-\infty}^{z} x^n \, dF(x) \tag{39}$$

können zudem die Lower Partial Moments generell wie folgt auf die partiellen Momente zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} LPM_n(z;X) &= \int_{-\infty}^{z} (z-x)^n \, dF(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, z^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\,F(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, z^{n-k} \, E_z(X^k) \, . \end{aligned} \tag{40}$$

Die Problematik reduziert sich damit auf die Bestimmung der partiellen Momente $E_z(X^n)$. Für eine größere Anzahl von Verteilungen (Normalverteilung, Beta- und Gammaverteilung sowie die Pearson-Familie von Verteilungen) bestimmen *Winkler/Roodman/Britney* (1972) hierzu explizite oder rekursive Beziehungen. *Albrecht/Maurer* (2002, S. 131 f.) benutzen diese Ergebnisse, um für den Fall der Normalverteilung sowie der Lognormalverteilung explizite Ausdrücke für die Lower Partial Moments der Ordnungen $n = 0$, 1 und 2 zu berechnen. Anknüpfend an die Ausführungen in *Darsinos/Satchell* (2003, S. 8 ff.) sind ferner im Anhang entsprechende Ergebnisse im Zusammenhang mit der Weibull-Verteilung zusammengestellt.

Ausgangspunkt der weiteren Berechnungen ist zunächst eine einperiodige Renditegröße $R = \frac{V_1}{v_0} - 1$. Um zu einer einheitlichen Darstellung zu gelangen[24] gehen wir dabei über zur Zufallsgröße $1 + R = \frac{V_1}{v_0}$, dem "Aufzinsungfaktor" bzw. der "relativen Wertveränderung". Der Wertebereich dieser Zufallsgröße ist $[0, \infty)$. Entsprechend ist die dazugehörige Omega-Funktion eine reellwertige Funktion $\Omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

6.2 Normalverteilung

Im Falle der Normalverteilung, d.h. $1 + R \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = 1 + E(R)$ und $\sigma^2 = Var(R)$ gilt[25] mit $h := (z - \mu)/\sigma$ die Beziehung

$$LPM_1(z;1 + R) = (z - \mu)\Phi(h) + \sigma\,\varphi(h) \,, \tag{41}$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion und $\varphi(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichne. Aufgrund der letzten Beziehung unter (37) gilt damit insgesamt:

$$\Omega_{1+R}(z) = 1 + \frac{\mu - z}{(z - \mu)\,\Phi(h) + \sigma\varphi(h)} \,. \tag{42}$$

Für die Psi-Funktion der Ordnung 1 gilt damit aufgrund von (26) und $F(z) = \Phi(h)$:

$$\Psi_{1+R}(z) = \Omega_{1+R}(z) \Big/ \left[\frac{1}{\Phi(h)} - 1 \right] . \tag{43}$$

---

24 Die Zufallsgröße R besitzt den Wertebereich $[-1, \infty)$, die Lognormal- und die Weibull-Verteilung den Wertebereich $[0, \infty)$.

25 Vgl. *Albrecht/Maurer* (2002, S. 131).

Für das LPM_2-Maß gilt im Falle der Normalverteilung[26]:

$$LPM_2(z;1+R) = [(z-\mu)^2 + \sigma^2]\Phi(h) + \sigma(z-\mu)\varphi(h) \ . \tag{44}$$

Hieraus folgt für die Sortino-Ratio:

$$SOR_z(1+R) = \frac{\mu - z}{\sqrt{[(z-\mu)^2 + \sigma^2]\Phi(h) + \sigma(z-\mu)\varphi(h)}} \ . \tag{45}$$

Aufgrund der Beziehungen (34) bzw. (33b) bzw. (26) lassen sich hieraus in Verbindung mit (41) und (42) entsprechende Ausdrücke für die UP-Ratio bzw. das Maß Ω_2 bzw. das Maß Ψ_2 ableiten.

6.3 Lognormalverteilung

Die Zufallsgröße $1+R$ folgt einer Lognormalverteilung, $1+R \sim LN(m,v^2)$, wenn $\ln(1+R)$ einer Normalverteilung folgt, $\ln(1+R) \sim N(m,v^2)$.

Zunächst ergibt sich[27] mit $g := [\ln(z) - m]/v$ und $u := m + \frac{1}{2}v^2$

$$LPM_1(z;1+R) = z\,\Phi(g) - \exp(u)\,\Phi(g-v) \ . \tag{46}$$

Für die Omega-Funktion ergibt sich dann aufgrund von $E(1+R) = \exp(u)$

$$\Omega_{1+R}(z) = 1 + \frac{\exp(u) - z}{z\,\Phi(g) - \exp(u)\,\Phi(g-v)} \ . \tag{47}$$

---

26 Vgl. ebenda.

27 Vgl. ebenda, S. 132.

Für die Psi-Funktion der Ordnung 1 gilt damit aufgrund von (26) und $F(z) = \Phi(g)$:

$$\Psi_{1+R}(z) = \frac{\Omega_{1+R}(z)}{\frac{1}{\Phi(g)} - 1} . \tag{48}$$

Für das LMP_2 -Maß gilt im Fall der Lognormalverteilung[28]:

$$LPM_2(z;1+R) = z^2\Phi(g) - 2z\exp(u)\Phi(g-v) + \exp[2(m+v^2)]\Phi(g-2v) . \tag{49}$$

Damit ergibt sich die Sortino-Ratio aufgrund von $E(1+R) = \exp(u)$ zu:

$$SOR_{1+R}(z) = [\exp(u) - z]\cdot[z^2\,\Phi(g) - 2z\exp(u)\Phi(g-v) + \exp[2(m+v^2)]\Phi(g-2v)]^{-1/2} . \tag{50}$$

Wie bereits im Falle der Normalverteilung können hieraus dann die entsprechenden Ausdrücke für die UP-Ratio sowie die Performancemaße Ω_2 und Ψ_2 gewonnen werden.

6.4 Weibull-Verteilung

Wir gehen aus von einer Weibull-Verteilung für $1+R$ mit dem Skalenparameter $\lambda > 0$ und dem Formparameter $a > 0$ gemäß den Ausführungen des Anhangs. Unter Verwendung von (A3) und (A7) ergibt sich zunächst:

$$\Omega_{1+R}(z) = 1 + \frac{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right) - z}{z\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right]\right\} - \lambda\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right) - \gamma\left(1+\frac{1}{a},\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right)\right]} . \tag{51}$$

[28] Vgl. ebenda.

Zur Bestimmung des Psi-Maßes der Ordnung 1 erhalten wir zunächst $F(z) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right]$ gemäß (A2) und hieraus $\frac{F(z)}{[1-F(z)]} = \exp\left[\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right] - 1$. Insgesamt folgt damit:

$$\Psi_{1+R}(z) = \left[\exp\left[\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right] - 1\right] \Omega_{1+R}(z)\ . \tag{52}$$

Für die Sortino-Ratio (24) erhalten wir schließlich aufgrund von (A8) den folgenden expliziten Ausdruck im Falle der Weibull-Verteilung:

$$\begin{aligned} SOR_z(1+R) = \left[\lambda\, \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right) - z\right] \cdot \Bigg[& z^2 \left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right]\right\} \\ & - 2z\lambda \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right) - \gamma\left(1+\frac{1}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right)\right] \\ & + \lambda^2 \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \gamma\left(1+\frac{2}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right)\right]\Bigg]^{-1/2}\ . \end{aligned} \tag{53}$$

Wie bereits zuvor können hieraus dann in Verbindung mit den Resultaten des Anhangs die entsprechenden Werte für die UP-Ratio sowie die Performancemaße Ω_2 und Ψ_2 gewonnen werden.

7 Schlussbetrachtungen

Die vorliegende Ausarbeitung hatte die einheitliche und generelle Fundierung referenzpunktbezogener risikoadjustierter Performancemaße zum Gegenstand. Im Vordergrund standen dabei die Omega- und Psi-Performancemaße. Es wurden die strukturellen Eigenschaften dieser Maße und ihrer Zusammenhänge, insbesondere auch zu weiteren aus der Literatur bekannten referenzpunktbezogenen Performancemaßen (Generalized Downside Performance Ratio, Upside Potential Ratio, Sortino-Maß) untersucht. Schließlich wurden für den Fall zentraler Verteilungsannahmen (Normal-, Lognormal- und Weibull-Verteilung) explizite Ausdrücke für das Omega- und Psi-Maß der Ordnung 1 sowie die Sortino-Ratio bestimmt. Der Schwerpunkt der Ausführungen lag dabei auf den theoretischen Grundlagen und Zusammenhängen. Die empirische Anwendung[29] der gewonnen Resultate bleibt einer weiteren Ausarbeitung vorbehalten.

[29] Empirische Anwendungen finden sich etwa in *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995), *Cascon/Keating/Shadwick* (2003 a, b), *Darsinos/Satchell* (2003), *Keating/Shadwick* (2002) sowie *Scheuenstuhl/Guse* (2003).

Anhang: Eigenschaften der Weibull-Verteilung

Wir gehen aus von der Dichtefunktion der Weibull-Verteilung und wählen dabei folgende Parametrisierung:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{a-1} \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{a}\right] & x > 0 \\ 0 & x \le 0\,. \end{cases} \tag{A1}$$

Dabei ist $\lambda > 0$ ein Skalenparameter und $a > 0$ ein Formparameter. Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{a}\right] & x > 0 \\ 0 & x \le 0\,. \end{cases} \tag{A2}$$

Unter Benutzung der Gammafunktion $(x > 0)$

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

ergeben sich dann zunächst die folgenden Resultate

$$\mu = E(X) = \lambda\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{\lambda}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right), \tag{A3}$$

$$E[(X-\mu)^2] = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{a}\right)\right]. \tag{A4}$$

Unter der weiteren Benutzung der unvollständigen Gammafunktion $(x > 0)$

$$\gamma(x, z) = \int_0^z e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

erhalten wir als weitere Resultate[30]

$$E_z(X) = \lambda \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right) \right], \tag{A5}$$

$$E_z(X^2) = \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \gamma\left(1 + \frac{2}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right) \right]. \tag{A6}$$

Damit erhalten wir gemäß (40) als LPM-Maße der Ordnungen 1 und 2 im Falle der Weibull-Verteilung:

$$\begin{aligned} LPM_1(z; X) &= zF(z) - E_z(X) \\ &= z\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right]\right\} \\ &\quad - \lambda \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right) \right], \end{aligned} \tag{A7}$$

$$\begin{aligned} LPM_2(z; X) &= z^2 F(z) - 2z\, E_z(X) + E_z(X^2) \\ &= z^2\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right]\right\} \\ &\quad - 2z\lambda \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \gamma\left(1 + \frac{1}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right) \right] \\ &\quad + \lambda^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \gamma\left(1 + \frac{2}{a}, \left(\frac{z}{\lambda}\right)^a\right) \right]. \end{aligned} \tag{A8}$$

---

30 Vgl. hierzu *Darsinos/Satchell* (2003, S. 9 f.).

Literatur

Albrecht, P. (1994): Zur Konzeptualisierung von Risiko und Chance mit Anwendungen in den Finanz- und Versicherungsmärkten, in: Hübner, U., E. Helten, P. Albrecht (Hrsg.): *Recht und Ökonomie der Versicherung*, Karlsruhe, 1 – 22.

Albrecht, P. (2004): Risk Measures, erscheint in: *Encyclopedia of Actuarial Science*.

Albrecht, P., R. Maurer (2002): *Investment- und Risikomanagement*, Stuttgart.

Albrecht, P., R. Maurer, M. Möller (1998): Shortfall-Risiko/Excess-Chance-Entscheidungskalküle: Grundlagen und Beziehungen zum Bernoulli-Prinzip, Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 118, 249 – 274.

Albrecht, P., R. Maurer, U. Ruckpaul (2001): Shortfall-risks of stocks in the long run, Financial Markets and Portfolio Management 15, 481 – 499.

Albrecht, P., R. Maurer, T. Stephan (1995): Shortfall-Performance rollierender Wertsicherungsstrategien, Finanzmarkt und Portfolio Management 9, 197 – 209.

Cascon, A., C. Keating, W.F. Shadwick (2003 a): The Omega Function, The Finance Development Centre, London.

Cascon, A., C. Keating, W.F. Shadwick (2003 b): Omega Functions: A New Tool for Financial Analysis, The Finance Development Centre, London.

Darsinos, T., S.E. Satchell (2003): Generalizing Universal Performance Measures, Faculty of Economics & Politics, University of Cambridge.

Embrechts, P., C. Klüppelberg, T. Mikosch (2002): *Modelling Extremal Events*, 4th Printing, Berlin, Heidelberg.

Feller, W. (1971): *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. II, 2. Aufl., New York u.a.

Fishburn, P., G. Kochenberger (1979): Concepts, Theory, Techniques: Two-piece Von Neumann-Morgenstern Utility Functions, Decision Sciences 10, 503 – 518.

Forsey, H. (2001): The Mathematician's View: Modelling Uncertainty with Three Parameter Lognormal, in: Sortino/Satchell (Hrsg., 2001), 51 – 58.

Kahnemann, D., A. Tversky (1979): Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica 47, 263 – 292.

Keating, C., W. Shadwick (2002): A Universal Performance Measure, Journal of Performance Measurement 6, 59 – 84.

Platinga, A., S. de Groot (2001): Preference Functions and Risk-adjusted Performance Measures, in: Sortino/Satchell (Hrsg., 2001), 169 – 193.

Scheuenstuhl, G., F. Guse (2003): Fonds Ranking – neuer Qualitätsmaßstab für Investmentfonds, in: Leser, H., M. Rudolf (Hrsg.): *Handbuch Institutionelles Asset Management*, Wiesbaden, 357 – 383.

Sharpe, W.F. (1994): The Sharpe Ratio, Journal of Portfolio Management, Fall 1994, 49 – 58.

Sortino, F.A. (2001): From Alpha to Omega, in: Sortino/Satchell (Hrsg., 2001), 3 – 25.

Sortino, F.A., S.E. Satchell (Hrsg., 2001): *Managing Downside Risk in Financial Markets: Theory, Practice and Implementation*, Oxford u.a.

Tversky, A., D. Kahnemann (1992): Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty, Journal of Risk and Uncertainty 5, 297 – 323.

Winkler, R.L., G.M. Roodman, R.R. Britney (1972): The Determination of Partial Moments, Management Science 19, 290 – 296.