Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie,

Portfolio Management und Versicherungswirtschaft

Nr. 92

DIE EVALUATION DES CHANCEN-RISIKO-PROFILS KOMBINIERTER AKTIEN- UND OPTIONSSTRATEGIEN IM KONTEXT VON EXCESS-CHANCE UND SHORTFALL-RISIKO

Michael Adam, Raimond Maurer und Matthias Möller

Universität Mannheim 1996

1.- 05/96 - 70

Die Evaluation des Chancen-Risiko-Profils kombinierter Aktien- und Optionsstrategien im Kontext von Excess-Chance und Shortfall-Risiko

von

Michael Adam, Raimond Maurer und Matthias Möller

Universität Mannheim

1 Problemstellung

Der Einsatz von Optionen bei der Steuerung von Aktien- bzw. Aktienportefeuilles ist mittlerweile zu einem Standardinstrumentarium der modernen Investmentpraxis geworden. Durch die Beimischung von Optionen gelingt es Anlegern, das originäre Chance-Risiko-Profil einer reinen Aktienanlage in sehr flexibler Weise zu beeinflussen. Wesentlich für den planmäßigen Einsatz von Optionsstrategien ist, daß die Anleger über Chancen und Risiken der resultierenden finanziellen Gesamtpositionen informiert sind. Die gewöhnlicherweise benutzten Zahlungsdiagramme der unsicheren Endvermögenspositionen können für die professionelle Investmentpraxis dabei lediglich eine erste Indikation darstellen, da sie nur zu qualitativen Aussagen über Chance und Risiko führen. Aus portefeuilletheoretischer Sicht bedarf es darüber hinaus einer Quantifizierung von Chance und Risiko. Dabei wurde spätestens seit Erscheinen der Arbeiten von *Bookstaber/Clarke* (1983a, b, 1984, 1985) deutlich, daß bei der Evaluation des Risikos von kombinierten Aktien- und Optionspositionen die traditionellen Risikomaße der Portefeuilletheorie, die Varianz bzw. die Standardabweichung, zu unbefriedigenden Ergebnissen führen. Die Ursache dieser Problematik liegt darin begründet, daß die Varianz bzw. Standardabweichung auf einer grundsätzlich symmetrischen Konstruktionsweise beruht. Sowohl mögliche Abweichungen unterhalb als auch oberhalb des Erwartungswertes werden als Risiko gemessen. Optionsstrategien führen jedoch zu komplexen, asymmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

Es bietet sich daher an, durch die Verwendung alternativer Risikomaße der Asymmetrie von Optionsstrategien besser gerecht zu werden. In der Literatur ist dabei insbesondere die in *Albrecht* (1994a, b) entwickelte allgemeine Klasse von Shortfall-Risikomaßen, mit den bekannten Spezialfällen Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Shortfall-Erwartungswert und Shortfall-Varianz, in das Zentrum des Interesses gerückt. So wurden diese Maße im Rahmen historischer oder stochastischer Simulationen

zur Bewertung von Optionsstrategien u.a. in den Arbeiten von *Lewis* (1990), *Ferguson* (1993), *Marmer/Ng* (1993), *Lee* (1993), *Zimmermann* (1994) sowie *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995a) eingesetzt. Erstmalig in der Arbeit von *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995b) wurden, hier im Kontext einer historischen Simulation, neben asymmetrischen Risikomaßen Optionsstrategien durch korrespondierende asymmetrische Chancenmaße bewertet.

Zur Gewinnung der gewünschten Risiko- und Chancenmaße stehen prinzipiell historische Simulationen, stochastische Simulationen sowie die Berechnung expliziter analytischer Ausdrücke zur Verfügung. Obwohl historische Untersuchungen gewöhnlicherweise stark von dem verwendeten Datenmaterial abhängig sind, ist die generelle Verwendung dieser Methode nicht zu beanstanden, da der Anleger über empirische Chancen und Risiken der zu beurteilenden Optionsstrategien informiert wird. Stochastische Simulationen sollten allerdings nur dann benutzt werden, wenn geschlossene analytische Ausdrücke nicht erzielt werden können. In *Albrecht/Maurer/Timpel* (1995) wurden geschlossene analytische Ausdrücke für den Erwartungswert, die Varianz, die Shortfall-Wahrscheinlichkeit, den Shortfall-Erwartungswert und die Shortfall-Varianz bei normal- bzw. logarithmisch normalverteilten Kurswerten des Underlyings im Kontext eines 1:1-Collars entwickelt. Ziel dieser Arbeit ist es einerseits, die in *Albrecht/Maurer/Timpel* (1995) gewonnenen Ergebnisse, für nunmehr beliebige Hedge-Ratios im Intervall [0, 1) zu erweitern. Weiterhin soll die in *Albrecht/Maurer/-Stephan* (1995b) begonnene Evaluation von Optionsstrategien mittels Excess-Chancenmaßen in die analytische Auswertung integriert sowie auf eine entscheidungslogische Basis gestellt werden.

2 Excess-Chance und Shortfall-Risiko von Aktienpositionen mit Optionen

Ausgangspunkt der Untersuchung sei ein Anleger, der eine in seinem Bestand befindliche Aktie mit heutigem Kurswert s_0, deren (zufälliger) Kurswert zum Zeitpunkt T durch die Zufallsvariable $S_T \geq 0$ modelliert sei, heute durch den Kauf von $0 \leq \alpha_1 < 1$ Europäischen Verkaufsoptionen auf diese Aktie (Long Put) mit Ausübungspreis x_1, Restlaufzeit T und Kaufpreis $p(x_1)$ gegenüber negativen Kurswertänderungen absichert.

Dieser Long Put wird des weitern (ganz, teilweise oder sogar über-) finanziert durch den Verkauf von $0 \leq \alpha_2 < 1$ Europäischen Kaufoptionen auf diese Aktie (Short Call) mit identischer Restlaufzeit wie der Long Put, Ausübungspreis $x_2 > x_1$ und Preis $c(x_2)$. Zur Vereinfachung sei unterstellt, daß aus der Aktie keine Zahlungen in Form von Dividenden oder Bezugsrechten erfolgen. Weiterhin sei

unterstellt, daß die Differenz zwischen dem gezahlten Preis für den Long Put und dem erhaltenen Preis für den Short-Call bis zum Zeitpunkt T zu dem risikolosen, kontinuierlichen Zins r finanziert oder angelegt werden kann. Die auf das Ende des Betrachtungshorizontes aufgezinsten (positiven oder negativen) Finanzierungskosten der Optionen betragen $\Delta = [\alpha_1 p(x_1) - \alpha_2 c(x_2)]\exp(rT)$. Diese sehr allgemeine kombinierte Aktien- und Optionsposition enthält eine Vielzahl von bekannten Positionen als Spezialfälle. So erhält man für den Fall $\alpha_1 \to 1$ und $\alpha_2 \to 1$ den sogenannten "Collar". Werden die beiden Ausübungspreise so gewählt, daß für die Differenz der Optionsprämie gerade $p(x_1) - c(x_2) = 0$ gilt, ergibt sich der "Zero-Cost-Collar". Den "1 : α_1-Put-Hedge" erreicht man bei $\alpha_2 = 0$ sowie den "1 : α_2-Covered-Short-Call", wenn $\alpha_1 = 0$ gesetzt wird. Eine reine Aktienposition ergibt sich für $x_1 \to \infty$ und $x_2 \to \infty$ bzw. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Die im folgenden erzielten Resultate lassen sich weiterhin auf Aktienportefeuilles übertragen, wenn es zu dem Portefeuille einen strukturell korrespondierenden Aktienindex gibt, auf dessen Indexstand (europäische) Put-Optionen gekauft und Call-Optionen verkauft werden können.

Für die unsichere Endvermögensposition dieser Investmentstrategie erhält man

$$V_T = S_T + \alpha_1 \max(x_1 - S_T, 0) - \alpha_2 \max(S_T - x_2, 0) - \Delta . \qquad \textbf{(2.1)}$$

Ziel der Arbeit ist die Evaluation des Risiko-Chancen-Profils der Endposition V_T im Kontext der von *Albrecht* (1994 a, b) entwickelten allgemeinen Shortfall-Risiko- bzw. Excess-Chance-Konzeption. Zur Vollständigkeit der Analyse werden die traditionellen portefeuilletheoretischen Maß für Chance und Risiko mit dem Erwartungswert bzw. der Varianz ebenfalls angegeben. Ausgangspunkt sei ein von dem Anleger festgelegter (deterministischer) Referenzpunkt, in Form eines erwünschten minimalen Endvermögens $m = m(T)$. Kandidaten für einen solchen Referenzpunkt könnten bspw. ein risikolos erzielbares Endvermögen oder eine aufsichtsrechtlich bzw. aufgrund von Marktgegebenheiten spezifizierte Mindestverzinsung des eingesetzten Kapitals sein. Risiko wird dann als die Gefahr verstanden, das geforderte Mindestvermögen zu verfehlen, und Chance als die Möglichkeit, das geforderte Mindestvermögen zu übertreffen. Die zugehörige Endvermögensposition läßt sich dann formal in drei Teile zerlegen (*Albrecht* 1994a, S. 2 f):

$$V_T = m + V_T^+(m) - V_T^-(m). \qquad \textbf{(2.2)}$$

Dabei bezeichne $V_T^+(m) = \max(V_T - m, 0)$ das Chancenpotential und $V_T^-(m) = \max(m - V, 0)$ das

Risikopotential der gewählten Strategie.

Weiter *Albrecht* (1994a) folgend, erhält man ein eindimensionales Risikomaß durch Einführung einer Verlustfunktion L(x) und Bestimmung des erwarteten Verlustes der Shortfall-Position:

$$\mathrm{SR}_{\mathrm{m}}(V_T) := \mathrm{E}[\mathrm{L}(V_T^-(m))] \ . \tag{2.3}$$

Bei Verwendung der Potenzfunktionen als Verlustfunktionen, also $\mathrm{L}(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, ergeben sich als Reihe von wichtigen Spezialfällen die sogenannten Shortfall-Risikomaße. Formal berechnen sich diese (im Fall $n = 0$ definiert man $\max(m - V_T, 0)^0 := I_{(-\infty, m)}(V)$) gemäß

$$\begin{aligned} \mathrm{SR}_{\mathrm{m}}(V_T) &:= \mathrm{E}[V_T^-(m)^n] \\ &= \mathrm{E}[\max(m - V_T, 0)^n] = \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{n}}(V_T) \ . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Technisch führt eine solche sehr flexible Risikodefinition auf das Problem der Bestimmung unterer partieller Momente (*Winkler/Roodman/Britney* 1972). Für die Spezialfälle $n = 0, 1, 2$ ergeben sich die bekannten Risikomaße Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Shortfall-Erwartungswert und Shortfall-Varianz. Es sei erwähnt, daß die Shortfall-Wahrscheinlichkeit sehr eng mit dem besonders im Risikomanagement von Kreditinstituten verwendeten Perzentil- bzw. "*Value-at-Risik*"-Konzept zusammenhängt. Der *Value at Risk* ergibt sich dadurch, daß eine bestimmte fixierte tolerierte Shortfall-Wahrscheinlichkeit $\mathrm{LPM}^0_m = \varepsilon$ (zum Beispiel $\varepsilon = 5\%$) vorgegeben und die Referenzgröße m in (2.4) bestimmt wird.

Üblicherweise verwendet man zur Bewertung des Chancenpotentials einer Wahrscheinlichkeitsverteilung finanzieller Ergebnisse den Erwartungswert $\mathrm{E}(V_T)$. Allerdings kann auch dieses ubiquitäre Chancenmaß kritisiert werden. Als genereller Kritikpunkt kann angeführt werden, daß der Erwartungswert ähnlich wie die Varianz die gesamte Wahrscheinlichkeitverteilung bewertet, obwohl ggf. lediglich Überschreitungen der Zielgröße von einem Investor als positiv eingestuft werden. Wenn Risiko relativ zu einem Referenzpunkt gemessen wird, dann ist die Verwendung des Erwartungswertes insoweit inkonsistent, als dann auch mögliche Unterschreitungen der Zielgröße in die Messung der Chance eingehen. Für den Erwartungswert als Chancenmaß spricht, ähnlich wie für die Varianz als Risikomaß, dessen einfache rechnerische Handhabung (beispielsweise seine Linearität). Ein

solches Argument kann jedoch für die Frage nach einer adäquaten Konzeptualisierung des Chancenpotentials der hier betrachteten kombinierten Aktien- und Optionsstrategien nicht ausreichen. Es besteht daher der Bedarf, zu der eingeführten Klasse von Shortfall-Risikomaßen konzeptionell passende Chancenmaße zu konstruieren.

In vollständiger Analogie zur Entwicklung des Risikopotentials einer Endvermögensposition bietet es sich an, das Chancenpotential im Sinne einer Excess-Chance zu konzeptualisieren (vgl. *Albrecht* 1994b, S. 13-14). Hierzu sei eine Gewinnfunktion $G(x)$ eingeführt, die eine Bewertung der möglichen Überschreitungen der Zielgröße m erlaubt:

$$\mathrm{EC}_{\mathrm{m}}(V_T) := \mathrm{E}[G(V_T^+(m))] \ . \tag{2.5}$$

Verwendet man zur Bewertung der Excess-Position ebenfalls die Potenzfunktionen $G(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ als Gewinnfunktionen, ergeben sich als Chancenmaße die sogenannten oberen partiellen Momente. Sei wiederum für den Fall $n = 0$ $\max(V_T - m, 0)^0 := I_{(-\infty, m)}(\mathrm{V})$ definiert, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{EC}_{\mathrm{m}}(V_T) &:= \mathrm{E}[V_T^+(m)^n] \\ &= \mathrm{E}[\max(V_T - m, 0)^n] = \mathrm{UPM}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{n}}(V_T). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Für die Spezialfälle $n = 0, 1, 2$ ergeben sich die Excess-Wahrscheinlichkeit, der Excess-Erwartungswert sowie die Excess-Varianz.

In *Albrecht/Maurer/Stephan* (1995b) wurde gezeigt, daß zwischen den Shortfall-Risiko- und Excess-Chancenmaßen folgende Zusammenhänge bestehen: Offensichtlich gilt für die Shortfall- bzw. die Excess-Wahrscheinlichkeit ($\mathrm{Prob}(V_T = m) = 0$ vorausgesetzt):

$$\mathrm{UPM}_{\mathrm{m}}^{0} = 1 - \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{0}. \tag{2.7}$$

Im Fall $\mathrm{Prob}(V_T = m) > 0$ gilt allgemein $\mathrm{UPM}^0_m = 1 - \mathrm{LPM}^0_m - \mathrm{Prob}(V_T = m)$, was dann relevant wird, wenn V_T im Punkt m einen Massepunkt besitzt. Sei $\mathrm{E}(V_T)$ das erwartete Endvermögen der Gesamtposition, so gilt für den Excess-Erwartungswert

$$\mathrm{UPM}_{\mathrm{m}}^{1} = \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{1} + \mathrm{E}(V_T) - m \ . \tag{2.8}$$

Schließlich gilt für die Excess-Varianz

$$\mathrm{UPM}_{\mathrm{m}}^{2} = \mathrm{Var}(V_T) + (\mathrm{E}(V_T) - m))^2 - \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{2} \ , \tag{2.9}$$

wobei $\mathrm{Var}(V_T)$ die Varianz des Endvermögens bezeichne.

Im folgenden fokussieren die weiteren Überlegungen auf die Berechnung der Größen $\mathrm{E}(V_T)$, $\mathrm{Var}(V_T)$ sowie den Shortfall-Risikomaßen $\mathrm{LPM}^0{}_m$, $\mathrm{LPM}^1{}_m$ und $\mathrm{LPM}^2{}_m$. Aufgrund der Beziehungen (2.7) - (2.9) sind auf Basis der gewonnenen Resultate die Excess-Chancenmaße damit ebenfalls bestimmt, womit auf deren explizite analytische Angabe im weiteren Verlauf der Arbeit verzichtet werden kann.

3 Entscheidungslogische Fundierung von Excess-Chancen und Shortfall-Risiko-Modellen

Das Hauptanliegen der Einscheidungstheorie unter Unsicherheit besteht in der Bewertung einer gegebenen Menge von Handlungsalternativen, deren jeweilige Konsequenz durch eine Zufallsvariable X repräsentiert wird. Das verwendete Bewertungskriterium soll es erlauben, die Handlungsalternativen in eine "Präferenzreihenfolge" zu bringen. Formal geschieht die Abbildung solcher Präferenzvorstellungen durch die Angabe eines Präferenzfunktionals Φ, wobei $\Phi(X)$ die Bewertung der Zufallsgröße operationalisiert und die Präferenz zwischen alternativen Zufallsgrößen X und Y durch

$$X \succeq Y \ \Leftrightarrow \ \Phi(X) \geq \Phi(Y) \tag{3.1}$$

expliziert wird. Für die Festlegung von Φ werden in der Literatur mehrere Möglichkeiten diskutiert, wobei in unserem Kontext vor allem sogenannte *Risiko-Wert-Modelle* bzw. *Risiko-Chancen-Modelle* von Interesse sind (vgl. *Sarin/Weber* 1993). Dabei wird das Präferenzfunktional Φ folgendermaßen spezifiziert

$$\Phi(X) = H[R(X), C(X)] \ . \tag{3.2}$$

Das Funktional R stellt ein Maß für das Risiko der zu beurteilenden Zufallsverteilung und das Funktional C eine Maßgröße für die der Zufallsgröße innewohnende Chance dar. Die Funktion H quantifiziert schließlich den *Trade-Off* zwischen Risiko und Chance. Ökonomisch plausible Anforderung an die Funktion H ist, daß sie steigend im Chancen- und fallend im Risikomaß sein sollte (vgl. *Sarin/Weber* 1993, S. 137). H sollte also konsistent zur folgenden Risiko-Chance-Dominanzeigenschaft sein:

> Eine Zufallsvariable X dominiert eine Zufallsvariable Y dann und nur dann, wenn $C(X) \geq C(Y)$ und $R(X) \leq R(Y)$ und eine der beiden Ungleichungen strikt ist.

Als klassisches Standardbeispiel für ein *Risiko-Chance-Modell* des Typus (3.2) ist das von *Markowitz* bei seiner Fundierung der Portfolio-Theorie verwendete Erwartungswert-Varianz-Modell zu nennen, bei dem Risiko durch die Varianz und Chance durch den Erwartungswert gemessen wird. In unserem Kontext wären als Risikomaße die vorgestellten $LPM^n_m(x)$ und als Chancenmaße die $UPM^n_m(x)$ bzw. $E(X)$ zu verwenden.

Ein alternatives Konzept, um unsichere Handlungsalternativen in eine Präferenzreihenfolge bringen zu können, ist das sogenannte *Bernoulli*-Prinzip. Das *Bernoulli*-Prinzip basiert auf einem System von Axiomen, welches gewährleistet, daß eine Funktion u derart existiert, daß

$$\Phi(X) = E[u(X)] \ . \tag{3.3}$$

Hierbei bezeichnet man die Funktion u als Risikonutzenfunktion. In der Risikonutzenfunktion werden sowohl die Risiko- als auch die Höhenpräferenzen des Entscheidungsträgers zum Ausdruck gebracht. Das *Bernoulli*-Prinzip beinhaltet keine explizite Risiko- und Chancenmessung, sondern beruht auf einer gesamthaften Bewertung der Zufallsgröße X.

Obwohl den auf einer expliziten Konzeptualisierung von Risiko und Chance basierenden Präferenzfunktionalen des Typus (3.2) durchaus eine eigenständige Bedeutung zukommt, ist es von Interesse, deren Konsistenz zum *Bernoulli*-Prinzip zu überprüfen, insbesondere deshalb, weil das *Bernoulli*-Prinzip in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur noch immer eine herausragende Stellung als

Bewertungskalkül für Entscheidungen unter Unsicherheit innehat.

Konsistente Verbindungen zwischen den Ansätzen des Typus (3.2) und (3.3) können dann bestehen, wenn für ein gegebenes Präferenzfunktional H die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen eingeschränkt wird. So sind etwa Erwartungswert-Varianz-Modelle bei Zugrundelegung einer Normalverteilung von X konsistent zum *Bernoulli*-Prinzip. Für unsere Fragestellung ist eine solche Vorgehensweise jedoch nicht zweckmäßig, da die im Kontext von kombinierten Aktien- und Optionspositionen generierten Verteilungen völlig atypischer Natur sind. Eine Konsistenz von Risiko-Chancen-Modellen zum *Bernoulli*-Kriterium kann auch dann gegeben sein, wenn für gegebenes R(X) und C(X) die Risikonutzenfunktion u bestimmten Anforderungen genügt. So ist bekanntermaßen das Erwartungswert-Varianz-Modell für quadratische Nutzenfunktionen konsistent zum *Bernoulli*-Kriterium. In *Fishburn* (1977) wurde nun gezeigt, daß ein in E(X) monoton wachsendes und in $\mathrm{LPM}^n_m(X)$ monoton fallendes Präferenzfunktional $\mathrm{H}[\mathrm{E}(X), \mathrm{LPM}^n_m(X)]$ genau dann konsistent zum *Bernoulli*-Prinzip ist in dem Sinne, daß es die gleiche Präferenzordnung generiert wie eine Risikonutzenfunktionen u(X), wenn u(X) bis auf eine positive lineare Transformation die Gestalt

$$u(x;\ n;\ m) = \begin{cases} x - k(m - x)^n & \text{für } x < m \\ x & \text{für } x \geq m \end{cases} \tag{3.4}$$

besitzt. In diesem Fall ergibt sich offensichtlich für das Präferenzfunktional $\mathrm{H}[\mathrm{E}(X), \mathrm{LPM}^n_m(X)] = \mathrm{E}(X) - k\mathrm{LPM}^n_m(X)$, wobei $k > 0$ die Risikoaversion des Entscheidungsträgers spezifiziert. Charakteristisch an solchen Risikonutzenfunktionen ist deren Linearität mit Steigung eins im Bereich $x \geq m$. Verwendet man die Shortfall-Wahrscheinlichkeit als Risikomaß, verläuft die Risikonutzenfunktion im Bereich $x < m$ auch linear, macht allerdings in $x = m$ einen Sprung der Höhe k. Der Graph der Nutzenfunktion bei Ansatz des Shortfall-Erwartungswertes verläuft ebenfalls linear im Bereich $x < m$, allerdings ohne Sprung bei $x = m$ als bei der Shortfall-Wahrscheinlichkeit, dafür jedoch mit einer höheren Steigung wie der obere Teilabschnitt. Wird Risiko durch die Shortfall-Varianz gemessen, verläuft der Teilbereich unterhalb der Zielgröße konkav.

Von Interesse ist nun, welche Anforderungen an die Risikonutzenfunktion zu stellen sind, wenn der Erwartungswert als Chancenmaß durch ein Maß des Typus UPM^n_m ersetzt wird. Eine **hinreichende** Bedingung für Konsistenz ist die folgende: besitzt die Risikonutzenfunktion u(.) die Gestalt

$$u(x;\ n;\ m) = \begin{cases} -\lambda(m - x)^n & \text{für } x < m \\ (x - m)^n & \text{für } x \geq m \end{cases} \tag{3.5}$$

mit einem Risikoaversionsparameter $\lambda > 0$, so gilt offensichtlich $E[u(X)] = UPM^n_m(X) - \lambda LPM^n_m(X)$. Somit folgt die Konsistenz des Präferenzfunktionals $H[UPM^n_m(X),\ LPM^n_m(X)] = UPM^n_m(X) - \lambda LPM^n_m(X)$ mit dem *Bernoulli*-Prinzip bei Verwendung der Risikonutzenfunktion des Typus (3.5). Die Forderung $\lambda > 0$ garantiert hierbei die ökonomisch sinnvolle Anforderung, daß H monoton wachsend in $UPM^n_m(X)$ und monoton fallend in $LPM^n_m(X)$ ist. Für den Fall des Excess-Erwartungswertes und des Shortfall-Erwartungswertes führt die Nutzenfunktion (3.5) wegen der generellen Beziehung (2.8) auf ein Präferenzfunktional der Form $\Phi(X) = E(X) - m + (1 - \lambda)LPM^1_m(X)$. Ökonomisch interessant ist in diesem Fall die Wahl des Gewichtungsfaktors λ zu interpretieren. Wird $\lambda = 1$ gewählt, bewertet der Entscheidungsträger die Excess-Chance einer Lotterie gleich stark wie deren Shortfall-Risiko. Wegen $\Phi(X) = E(X) - m$ ist dies gleichbedeutend mit risikoneutralem Entscheidungsverhalten. Wird ein $\lambda < 1$ gewählt, bewertet der Entscheidungsträger die Chance einer Lotterie höher als das korrespondierende Risiko, ist also risikofreudig. Lediglich für $\lambda > 1$ resultiert ein risikoaverses Entscheidungsverhalten.

4 Allgemeine Resultate

Die Vermögensendposition der gemäß (2.1) definierten Klasse von Optionsstrategien, läßt sich in Abhängigkeit der Optionsparameter sowie des unsicheren Kurses des Underlyings am Ende der Periode auch schreiben als ($V = V_T$, $S = S_T$)

$$V = \begin{cases} (1 - \alpha_1)S + \alpha_1 x_1 - \Delta & S \leq x_1 \\ S - \Delta & x_1 < S < x_2 \\ (1 - \alpha_2)S + \alpha_2 x_2 - \Delta & S \geq x_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Interessiert sind wir nun an der Fragestellung, welche Zufallsgesetzmäßigkeit V in Abhängigkeit der Optionsparameter sowie der Zufallsgesetzmäßigkeit des Underlyings besitzt. Unterstellt man, S habe eine Dichtefunktion f, dann gilt aufgrund der strengen Monotonie von V für die Dichtefunktion $g(v)$ von V

$$g(v) = \begin{cases} g_1(v) = f\left[\dfrac{v - \alpha_1 x_1 + \Delta}{1 - \alpha_1}\right]\dfrac{1}{1 - \alpha_1} & \alpha_1 x_1 - \Delta \leq v \leq x_1 - \Delta \\ g_2(v) = f(v + \Delta) & x_1 - \Delta \leq v \leq x_2 - \Delta \\ g_3(v) = f\left[\dfrac{v - \alpha_2 x_2 + \Delta}{1 - \alpha_2}\right]\dfrac{1}{1 - \alpha_2} & v \geq x_2 - \Delta \\ 0 & sonst\ . \end{cases} \tag{4.2}$$

Die erwartete Endvermögensposition berechnet sich dann gemäß

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(V) &= \int_{-\infty}^{\infty} v\, g(v)\, \mathrm{d}v \\ &= \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} v\, g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{x_2 - \Delta} v\, g_2(v) \mathrm{d}v + \int_{x_2 - \Delta}^{\infty} v\, g_3(v)\, \mathrm{d}v\ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Für die Varianz erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V) &= \mathrm{E}(V^2) - [\mathrm{E}(V)]^2 \\ &= \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} v^2\, g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{x_2 - \Delta} v^2\, g_2(v) \mathrm{d}v + \int_{x_2 - \Delta}^{\infty} v^2\, g_3(v)\, \mathrm{d}v \\ &\quad - \left[\int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} v\, g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{x_2 - \Delta} v\, g_2(v) \mathrm{d}v + \int_{x_2 - \Delta}^{\infty} v\, g_3(v)\, \mathrm{d}v\right]^2 . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die möglichen Ausprägungen der Shortfall-Risikomaße hängen offensichtlich von der Lage der Zielgröße ab. Dabei sind insgesamt vier Fälle zu unterscheiden:

1. Fall $m < \alpha_1 x_1 - \Delta$

Bei dieser Konstellation liegt die Zielgröße unterhalb des minimal erreichbaren Endververmögen der betrachteten Strategie. Die Shortfall-Position ergibt sich dann zu $V_- \equiv 0$, womit $\mathrm{LPM}_m^0 = \mathrm{LPM}_m^1 = \mathrm{LPM}_m^2 = 0$ gilt. Für die Excess-Chancen-Maße erhält man unter Ausnutzung von (2.7) - (2.9) $\mathrm{UPM}_m^0 = 1$, $\mathrm{UPM}_m^1 = \mathrm{E}(V) - m$ und $\mathrm{UPM}_m^2 = \mathrm{Var}(V) - [\mathrm{E}(V) - m]^2$.

2. Fall $\alpha_1 x_1 - \Delta \leq m < x_1 - \Delta$

Für die Shortfall-Wahrscheinlichkeit ergibt sich in diesem Fall mit $a = 1/(1 - \alpha_1)$ und $b = (\Delta - \alpha_1 x_1)/(1 - \alpha_1)$

$$P(V \leq m) = P((1 - \alpha_1)S + \alpha_1 x_1 - \Delta \leq m) = P[(S \leq am + b] = F(am + b) \ . \tag{4.5}$$

Für den Shortfall-Erwartungswert erhält man

$$\mathrm{E}[\max(m - V, 0)] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{m} (m - v) g_1(v) \mathrm{d}v \tag{4.6}$$

und schließlich gilt für die Shortfall-Varianz

$$\mathrm{E}[\max(m - V, 0)^2] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{m} (m - v)^2 g_1(v) \mathrm{d}v \ . \tag{4.7}$$

3. Fall $x_1 - \Delta \leq m < x_2 - \Delta$

In diesem Fall gilt für die Shortfall-Wahrscheinlichkeit

$$P(V \leq m) = P(S - \Delta \leq m) = F(m + \Delta). \tag{4.8}$$

Für den Shortfall-Erwartungswert ergibt sich

$$\mathrm{E}[\max(m - V,\ 0)] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} (m - v)\, g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{m} (m - v)\, g_2(v)\, \mathrm{d}v \tag{4.9}$$

und schließlich für die Shortfall-Varianz

$$\mathrm{E}[\max(m - V,\ 0)^2] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} (m - v)^2 g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{m} (m - v)^2 g_2(v)\, \mathrm{d}v\ . \tag{4.10}$$

4. Fall $m \geq x_2 - \Delta$

Im letzten Fall ergibt sich für die Shortfall-Wahrscheinlichkeit mit $c = 1/(1 - \alpha_2)$ und $d = (\Delta - \alpha_2 x_2)/(1 - \alpha_2)$

$$\mathrm{P}(V \leq m) = \mathrm{P}((1 - \alpha_2)\, S + \alpha_2 x_2 - \Delta \leq m) = \mathrm{P}(S \leq cm + d) = F(cm + d)\ . \tag{4.11}$$

Der Shortfall-Erwartungswert berechnet sich zu

$$\mathrm{E}[\max(m - V,\ 0)] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} (m - v)\, g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{x_2 - \Delta} (m - v)\, g_2(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_2 - \Delta}^{m} (m - v)\, g_3(v)\, \mathrm{d}v \tag{4.12}$$

sowie die Shortfall-Varianz gemäß

$$\mathrm{E}[\max(m - V,\ 0)^2] = \int_{\alpha_1 x_1 - \Delta}^{x_1 - \Delta} (m - v)^2 g_1(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_1 - \Delta}^{x_2 - \Delta} (m - v)^2 g_2(v)\, \mathrm{d}v + \int_{x_2 - \Delta}^{m} (m - v)^2 g_3(v)\, \mathrm{d}v\ . \tag{4.13}$$

5 Resultate für logarithmisch normalverteilte Aktienkurse

5.1 Einführung

Die konkrete Berechnung der oben eingeführten Risiko- und Chancenmaße bedarf einer Spezifikation der Zufallsgesetzmäßigkeit der Zufallsgröße S_T. Trifft man die Standardannahme, daß der Kursprozeß der ungesicherten Aktienposition $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ einem geometrischen *Wiener*-Prozeß mit konstanter Drift u und konstanter Volatilität s folgt, ergibt sich für den Kurswert am Ende des Betrachtungszeitraums ($S_T = S$) gemäß *Hull* (1993, S. 210) $\ln S \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu = \ln s_0 + (u - s^2/2)T$ und $\sigma^2 = s^2T$. Das bedeutet, der Endwert der ungesicherten Aktienposition ist logarithmisch normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Es sei darauf hingewiesen, daß sich für die Modellierung der Optionspreise dann die *Black/Scholes* Formel anbieten würde.

Für die Herleitung expliziter Lösungen ist es erforderlich, die folgenden bestimmten Integrale zu berechnen. Bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung so gilt für $l < u$

$$\int_l^u g_1(v)\mathrm{d}v = \Phi\left[\frac{\ln(au + b) - \mu}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{\ln(al + b) - \mu}{\sigma}\right] \tag{5.1}$$

sowie

$$\int_l^u v g_1(v)\mathrm{d}v = a\int_l^u v f(av + b)\mathrm{d}v = a\int_l^u \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(ax + b)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(ax + b) - \mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\ . \tag{5.2}$$

Mit der Substitution $y(x) = \ln(ax + b)$ ergibt sich für den obigen Ausdruck wegen $y'(x) = a/(ax + b)$

$$\int_{\ln(al + b)}^{\ln(au + b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\frac{e^y - b}{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}y \tag{5.3}$$

und mit der nochmaligen Substitution $z(y) = (y - \mu)/\sigma$ erhält man hierfür wegen $z'(y) = 1/\sigma$

$$\int_{\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma}}^{\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{e^{z\sigma+\mu}-b}{a} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z \tag{5.4}$$

wofür man mit *Winkler* et al. (Formel 4.4) den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a} e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma} - \sigma \right) - \Phi\left(\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma} - \sigma \right) \right] \\ &- \frac{b}{a} \left[\Phi\left(\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma} \right) \right] . \end{aligned} \tag{5.5}$$

erhält. Schließlich ergibt sich für

$$\int_l^u v^2 g_1(v)\mathrm{d}v = a\int_l^u v^2 f(av+b)\mathrm{d}v = a\int_l^u \frac{x^2}{ax+b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(ax+b)-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x \ , \tag{5.6}$$

wofür sich mit der Substitution $y(x) = \ln(ax + b)$ und wegen $y'(x) = a(ax + b)$ der Ausdruck

$$\int_{\ln(al+b)}^{\ln(au+b)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \left[\frac{e^y - b}{a} \right]^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}y \tag{5.7}$$

ergibt. Mit der nochmaligen Substitution $z(y) = (y - \mu)/\sigma$ und wegen $z'(y) = 1/\sigma$ erhält man hierfür mit *Winkler* et al. (Formel 4.4)

$$\frac{1}{a^2}\, e^{2(\mu+\sigma^2)} \left[\Phi\left(\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma} - 2\sigma\right) - \Phi\left(\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma} - 2\sigma\right)\right]$$
$$- \frac{2b}{a^2}\, e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma} - \sigma\right) - \Phi\left(\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma} - \sigma\right)\right] \tag{5.8}$$
$$+ \frac{b^2}{a^2} \left[\Phi\left(\frac{\ln(au+b)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(al+b)-\mu}{\sigma}\right)\right] .$$

Weiterhin ergibt sich für

$$\int_l^u g_2(v)\,\mathrm{d}v = \Phi\left(\frac{\ln(u+\Delta)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l+\Delta)-\mu}{\sigma}\right) \tag{5.9}$$

sowie für

$$\int_l^u v g_2(v)\mathrm{d}v = \int_l^u v f(v+\Delta)\,\mathrm{d}v = \int_l^u \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(x+\Delta)}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x+\Delta)-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x . \tag{5.10}$$

Hierfür erhält man mit der Substitution $y(x) = \ln(x + \Delta)$ und wegen $y'(x) = 1/(x + \Delta)$ den Ausdruck

$$\int_{\ln(l+\Delta)}^{\ln(u+\Delta)} \frac{e^y - \Delta}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}y . \tag{5.11}$$

Mit der nochmaligen Substitution $z(y) = (y - \mu)/\sigma$ mit $z'(y) = 1/\sigma$ und wegen *Winkler* et al. (Formel 4.4) ergibt sich

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\ln(u+\Delta)-\mu}{\sigma} - \sigma\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l+\Delta)-\mu}{\sigma} - \sigma\right)\right]$$
$$- \Delta \left[\Phi\left(\frac{\ln(u+\Delta)-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l+\Delta)-\mu}{\sigma}\right)\right] . \tag{5.12}$$

Schließlich gilt

$$\int_l^u v^2 g_2(v)\mathrm{d}v = \int_l^u v^2 f(v + \Delta)\,\mathrm{d}v = \int_l^u \frac{x^2}{x + \Delta}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x + \Delta) - \mu}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\ . \tag{5.13}$$

Durch analoge Substitutionen wie oben und wiederholtes Anwenden von *Winkler* et al. (Formel 4.4.) berechnet sich hierfür der Ausdruck

$$\begin{aligned} & e^{2(\mu+\sigma^2)}\left[\Phi\left(\frac{\ln(u + \Delta) - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l + \Delta) - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right)\right] \\ & - 2\Delta\ e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left[\Phi\left(\frac{\ln(u + \Delta) - \mu}{\sigma} - \sigma\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l + \Delta) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right] \\ & + \Delta^2\left[\Phi\left(\frac{\ln(u + \Delta) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(l + \Delta) - \mu}{\sigma}\right)\right]\ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

Zur Berechnung der bestimmten Integrale bezüglich $g_3(v)$ geht man analog wie für $g_1(v)$ vor. Man erhält dann strukturell identische Ausdrücke wie (5.1), (5.5) und (5.8) wobei allerdings der Parameter a durch $c = 1/(1 - \alpha_2)$ und der Parameter b durch $d = (\Delta - \alpha_2 x_2)/(1 - \alpha_2)$ zu ersetzen ist.

5.2 Ergebnisse

Bezeichne nun Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, so ergibt die Auswertung von (4.3) für den **Erwartungswert**

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(V) = {} & e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\left[1 - \alpha_1\Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma\right) - \alpha_2\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\right)\right] \\ & + \alpha_1 x_1\Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right) + \alpha_2 x_2\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right)\right) - \Delta\ . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Für die **Varianz** der Endvermögensposition ergibt sich der folgende Ausdruck

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(V) = {} & e^{2(\mu+\sigma^2)} \Bigg[(\alpha_1^2 - 2\alpha_1)\, \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - 2\sigma \right] + (1-\alpha_2)^2 \\
& + (2\alpha_2 - \alpha_2^2)\, \Phi \left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - 2\sigma \right] \Bigg] - 2e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Big[(1-\alpha_2)(\Delta - \alpha_2 x_2) + \\
& \alpha_1(\alpha_1 x_1 - x_1 - \Delta)\, \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma \right] + \alpha_2(x_2 + \Delta - \alpha_2 x_2)\, \Phi \left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - \sigma \right] \Big] \\
& + (\alpha_1^2 x_1^2 - 2\Delta\alpha_1 x_1)\, \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} \right] + (2\Delta\alpha_2 x_2 - \alpha_2 x_2^2) \left[1 - \Phi \left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} \right] \right] + \Delta^2 \\
& - \Bigg[e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left[1 - \alpha_1 \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma \right] - \alpha_2 \left[1 - \Phi \left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - \sigma \right] \right] \right] \\
& + \alpha_1 x_1 \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} \right] + \alpha_2 x_2 \left[1 - \Phi \left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} \right] \right] - \Delta \Bigg]^2 .
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Für den Fall eins $0 < m < \alpha_1 x_1 - \Delta$ sind die **Shortfall-Risikomaße** alle identisch Null. Interessant sind die Fälle zwei bis vier.

2. Fall $\alpha_1 x_1 - \Delta < m < x_1 - \Delta$

Seien $a = 1/(1 - \alpha_1)$ und $b = (\Delta - \alpha_1 x_1)/(1 - \alpha_1)$ so ergeben sich für die **Shortfall-Wahrscheinlichkeit**

$$
\mathrm{LPM}_m^0 = \Phi \left[\frac{\ln(am + b)}{\sigma} - \mu \right] , \tag{5.17}
$$

für den **Shortfall-Erwartungswert**

$$
\mathrm{LPM}_m^1 = (m + \Delta - \alpha_1 x_1)\, \Phi \left[\frac{\ln(am + b) - \mu}{\sigma} \right] - (1 - \alpha_1)\, e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\, \Phi \left[\frac{\ln(am + b) - \mu}{\sigma} - \sigma \right] \tag{5.18}
$$

und für die **Shortfall-Varianz**

$$\begin{aligned} \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{2} = & \left[m^2 + 2m\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \right] \Phi \left[\frac{\ln(am + b) - \mu}{\sigma} \right] \\ & - \left[\frac{2m}{a} + \frac{2b}{a^2} \right] e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi \left[\frac{\ln(am + b - \mu}{\sigma} - \sigma \right] \\ & + \frac{1}{a^2} e^{2(\mu + \sigma^2)} \Phi \left[\frac{\ln(am + b) - \mu}{\sigma} - 2\sigma \right]. \end{aligned} \tag{5.19}$$

3. Fall $x_1 - \Delta < m < x_2 - \Delta$

Mit den gleichen Bezeichnungen für a und b wie im zweiten Fall erhält man für die **Shortfall-Wahrscheinlichkeit**

$$\mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{0} = \Phi \left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma} \right] , \tag{5.20}$$

für den **Shortfall-Erwartungswert**

$$\begin{aligned} \mathrm{LPM}_{\mathrm{m}}^{1} = & (m + \Delta)\Phi \left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma} \right] - \alpha_1 x_1 \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} \right] \\ & - e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left[\Phi \left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma} - \sigma \right] - \alpha_1 \Phi \left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma \right] \right] \end{aligned} \tag{5.21}$$

sowie für die **Shortfall-Varianz**

$$\begin{aligned}
\mathrm{LPM}_m^2 = {} & (m + \Delta)^2 \Phi\left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma}\right] + [\alpha_1^2 x_1^2 - 2\alpha_1 x_1 (m + \Delta)]\Phi\left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right] \\
& - 2[\alpha_1^2 x_1 - \alpha_1(x_1 + m + \Delta)] e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma\right] \\
& - 2(m + \Delta) e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma} - \sigma\right] + (\alpha_1^2 - 2\alpha_1) e^{2(\mu + \sigma^2)} \Phi\left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right] \\
& + e^{2(\mu + \sigma^2)} \Phi\left[\frac{\ln(m + \Delta) - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

4. Fall $m > x_2 - \Delta$

Seien nun $c = 1/(1 - \alpha_2)$ und $d = (\Delta - \alpha_2 x_2)/(1 - \alpha_2)$ erhält man für die **Shortfall-Wahrscheinlichkeit**

$$\mathrm{LPM}_m^0 = \Phi\left[\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma}\right], \tag{5.23}$$

für den **Shortfall-Erwartungswert**

$$\begin{aligned}
\mathrm{LPM}_m^1 = {} & (m + \Delta - \alpha_2 x_2)\Phi\left[\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma}\right] + \alpha_2 x_2 \Phi\left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right] \\
& - \alpha_1 x_1 \Phi\left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right] + e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\left[\alpha_1 \Phi\left[\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma\right]\right. \\
& \left. - \alpha_2 \Phi\left[\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - \sigma\right] - (1 - \alpha_2)\Phi\left[\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right]\right]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

sowie für die **Shortfall-Varianz**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LPM}_m^2 = {} & [\alpha_1^2 x_1^2 - 2\alpha_1 x_1 (m + \Delta)]\,\Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma}\right) + [2\alpha_2 x_2 (m + \Delta) - \alpha_2^2 x_2^2]\,\Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma}\right) \\
& + \left(m^2 + 2m\frac{d}{c} + \frac{d^2}{c^2}\right)\Phi\left(\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma}\right) \\
& + e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\Bigg[2[\alpha_1 (x_1 + m + \Delta) - \alpha_1^2 x_1]\,\Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - \sigma\right) \\
& - 2[\alpha_2 (x_2 + m + \Delta) - \alpha_2^2 x_2]\,\Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - \sigma\right) \\
& - \left(\frac{2m}{c} + \frac{2d}{c^2}\right)\Phi\left(\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma} - \sigma\right)\Bigg] \\
& + e^{2(\mu + \sigma^2)}\Bigg[(\alpha_1^2 - 2\alpha_1)\,\Phi\left(\frac{\ln x_1 - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right) - (\alpha_2^2 - 2\alpha_2)\,\Phi\left(\frac{\ln x_2 - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right) \\
& + (1 - \alpha_2)^2\,\Phi\left(\frac{\ln(cm + d) - \mu}{\sigma} - 2\sigma\right)\Bigg] .
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

In der Studie von *Albrecht/Maurer/Timpel* (1994) wurden analytische Ausdrücke für den Erwartungswert, die Varianz sowie für die Shortfall-Riskomaße im Fall eines 1:1 Collars berechnet. Bildet man nun für die Ausdrücke (5.15), (5.16), (5.20) - (5.25) den Grenzübergang $\alpha_1 \to 1$ und $\alpha_2 \to 1$, so ergeben sich die dort abgeleiteten Ergebnisse.

6 Schlußbetrachtung

Die vorliegende Arbeit fokussierte auf die analytische Auswertung von Excess-Chance- und Shortfall-Risikomaße bezüglich einer großen Klasse von kombinierten Aktien- und Optionsstrategien. Es wurde allgemein gezeigt, wie diese Maße für gegebene Parameter der Optionsstrategie und bei gegebener Verteilung der zugrundeliegenden Aktie berechnet werden können. Konkrete Resultate wurden für die wichtigste Verteilungsannahme, nämlich einer logarithmischen Normalverteilung des Underlying, angegeben. Schließlich wurde das verwendete Excess-Chance- und Shortfall-Risiko-Kalkül auf eine entscheidungslogische Grundlage gestellt. Dabei wurde einerseits die eigenständige Klasse der Risk-Value-Modelle angeführt anderseits wurden Bedingungen angegeben, bei denen solche Kalküle

konsistent zum *Bernoulli*-Prinzip sind. Die erzielten Ergebnisse können vielfältig in Fragen des Risikomanagements und der Performancebeurteilung von Optionsstrategien eingesetzt werden, ohne auf stochastische Simulationsansätze zurückgreifen zu müssen.

Literaturverzeichnis

Albrecht, P. (1994a): Shortfall Returns and Shortfall Risk, in: Actuarial Approach for Financial Risks, Proceedings of the 4th AFIR International Colloquium, Orlando 1994, Vol 1, S. 87-110.

Albrecht, P. (1994b): Zur Konzeptualisierung von Risiko und Chance mit Anwendungen in den Finanz- und Versicherungsmärkten, in: *Hübner*, U.; E. *Helten*, P. *Albrecht* (Hrsg.): Recht und Ökonomie der Versicherung, Karlsruhe, S. 1-22.

Albrecht, P.; R. *Maurer*; T. G. *Stephan* (1995a): Return and Shortfall Risks of Rollover Hedge-Strategies with Options, Actuarial Approach for Financial Risks, Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, Brüssel, Vol. 3, S. 975-1001.

Albrecht, P.; R. *Maurer*; T. G. *Stephan* (1995b): Shortfall-Performance rollierender Wertsicherungs-strategien, Finanzmarkt und Portfolio Management 2, S. 197-209.

Albrecht, P.; R. *Maurer*; M. *Timpel* (1995): A Shortfall Approach to the Evaluation of Risk and Return of Positions with Options, Actuarial Approach for Financial Risks, Proceedings of the 5th AFIR International Colloquium, Brüssel, Vol. 3, S. 1003-1023.

Bookstaber, R.; R. *Clarke* (1983a): Option Strategies for Institutional Management, Reading/-Massachussetts.

Bookstaber, R.; R. *Clarke* (1983b): An Algorithem to Calculate the Return Distribution of Portfolios with Option Positions, Management Science 29, S. 419-429.

Bookstaber, R.; R. *Clarke* (1984): Option Portfolio Strategies: Measurement and Evaluation, in: Journal of Business 57, S. 469-492.

Bookstaber, R.; R. *Clarke* (1985): Problems in Evaluating the Performance of Portfolios with Options, Financial Analysts Journal, January-February, S. 48-62.

Ferguson, R. (1993): Some Formulas for Evaluating Two Popular Option Strategies, Financial Analysts Journal, September-October 1993, S. 71-76.

Hull, J. C. (1993): Options, Futures, And Other Derivative Securities, 2. Aufl., Englewood Cliffs, New Jersey.

Lee, P. (1993): Portfolio Selection in the Presence of Options, in: Actuarial Approach for Financial Risks, Proceedings of the 3rd AFIR International Colloquium, Rom 1993, Vol. 2, S. 691-708.

Lewis, A. L. (1990): Semivariance and The Performance of Portfolios with Options, Financial Analysts Journal, July-August 1990, S. 67-76.

Marmer, K. S.; F. K. *Ng* (1993): Mean-Semivariance Analysis of Option-Based-Strategies: A Total Asset Mix Perspective, Financial Analysts Journal, May-June 1993, S. 47-54.

Merton, R. C.; M. S. *Scholes*; M. L. *Gladstein* (1978): The Returns and Risk of Alternative Call Options Portfolio Investments Strategies, Journal of Business 51, S. 183-242.

Sarin, R. K.; M. *Weber* (1993): Risk-value models, European Journal of Operational Research 72, S. 135-149.

Winkler, R. L.; G. M. *Roodman*, R. R. *Britney* (1972): The Determination of Partial Moments, Management Science 19, S. 290-295.

Zimmermann, H. (1994): Editorial: Reward-to-Risk, Finanzmarkt und Portfolio Management, Vol. 1, S. 1-6.